Ответы на экзаменационные вопросы по матанализу

1.Понятие множества. Операции над множествами.

Под множеством понимается совокупность элементов (объектов) той или иной природы.

Множества обычно обозначают большими буквами латинского или другого алфавита: A, B, X, Γ, Ω …, а элементы множества малыми буквами a, b, x, γ, ω …

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$. Если a не принадлежит множеству A, то запись этого утверждения имеет вид $a \notin A$.

Множества A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов , то есть равенство $A = B$ означает, что одно и тоже множество обозначено разными буквами.

Существует два основных способа задания множества. Если элементы множества могут быть перечислены, то такое множество записывают в виде $A = \{a, b, c, ...\}$. Эта запись означает, что множество A состоит из элементов a, b, c и возможно еще каких-то других. Список элементов может быть и бесконечным. Например, множество $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$ содержит четыре элемента: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$. Множество $N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$, где n — целое положительное число, состоит из бесконечного числа элементов. Если множество состоит из элементов a_i, где индекс i принимает значения из некоторого множества U, то его записывают в виде $A = \{a_i\}_{i \in U}$.

Если множество A состоит из элементов, обладающих определенным свойством, то его записывают в виде $A = \{a \mid \text{свойство элементов}\}$, где в фигурных скобках после вертикальной черты указывают данное свойства элементов множества. Например, если множество A — это отрезок $[a, b]$ ($a < b$), то есть множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$, то форма записи множества A имеет вид $A = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$.

Пример. Запись $A = \{x \in R \mid x^2 - 3x - 4 = 0\}$ означает, что множество A состоит из вещественных корней квадратного уравнения $x^2 - 3x - 4 = 0$, то есть $A = \{-1, 4\}$.

Пустым множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента. Оно обозначается символом $\varnothing$.

Множество A называется **подмножеством** множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B. В этом случае пишут $A \subset B$. Последнюю запись можно прочитать и так: множество A заключено (содержится) в множестве B.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то каждый элемент множества A принадлежит множеству B, а каждый элемент множества B принадлежит множеству A. Следовательно, множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то есть $A = B$.

Операции над множествами

Пусть A и B — произвольные множества.

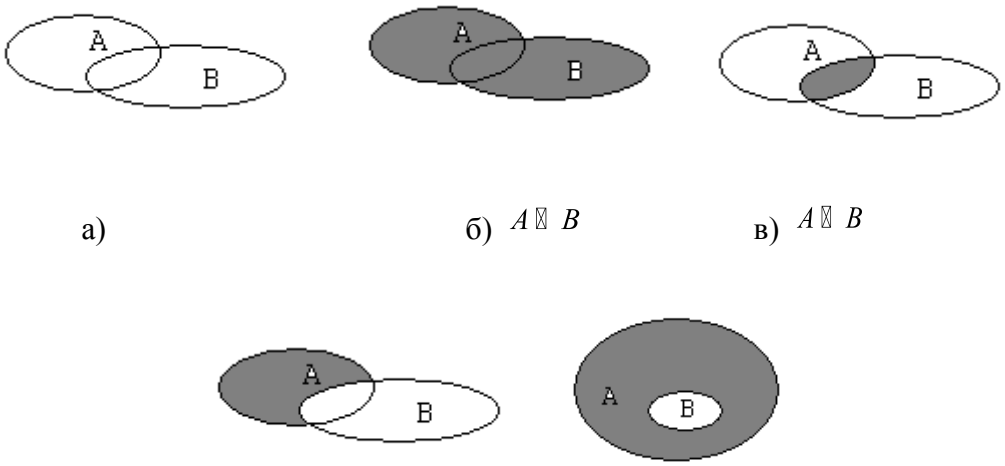
Объединением или суммой множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B. Объединение множеств A и B обозначается символом $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B, Пересечение множеств A и B обозначается через $A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, множества A, не принадлежащих множеству B. Разность обозначается как $A \setminus B$.

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называется **дополнением** множества B до множества A и обозначается $\overline{B}_A$.

Для наглядности множества нередко изображают в виде некоторой совокупности точек на плоскости. На рис. 1а изображены множества A и B, на рис. 1б — их объединение, на рис. 1в — пересечение множеств A и B, на рис. 1г — разность множеств A и B, на рис. 1д — дополнение множества B до множества A.



а) б) $A \cup B$ в) $A \cap B$

г) $A \setminus B$ д) $\overline{B}_A$

Рис. 1

Пусть задана система множеств A_k, где значения k образуют некоторую совокупность индексов Ω. **Объединением** $\bigcup_{k\in\Omega} A_k$ **множеств** A_k называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_k. **Пересечением** $\bigcap_{k\in\Omega} A_k$ **множеств** A_k называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежщих одновременно всем множествам A_k.

Пример. Пусть $A = \{x \in N \mid 2 < x \le 6\}$, $B = \{x \in N \mid 1 < x < 4\}$, $C = \{x \in N \mid x^2 - 4 = 0\}$, где N — множество натуральных чисел. Тогда

$$A = \{3,4,5,6\},\ B = \{2,3\},\ C = \{2\},$$

$$A \cup B = A \cup C = A \cup B \cup C = \{2,3,4,5,6\},\ B \cap C = \{2,3\},$$

$$A \cap B = \{3\},\ A \cap C = A \cap B \cap C = \varnothing,\ B \cap C = \{2\},$$

$$A \setminus B = \{4,5,6\},\ B \setminus A = \{2\},\ A \setminus C = A,\ C \setminus A = C,\ B \setminus C = \overline{C}_B = \{3\}.$$

2. Понятие функции. Область определения. Область значений. Способы задания функции. Простейшие элементарные функции.

Понятие функции

Если каждому значению переменной x из некоторого множества $\{x\}$ ставится в соответствие по известному закону единственное число y, то говорят, что на множестве $\{x\}$ задана функция $y = y(x)$ или $y = f(x)$.

При этом x называется **аргументом** функции, множество $\{x\}$ — **областью задания** функции $y = f(x)$. Число y, которое соответствует данному значению аргумента x, называется **частным значением** функции в точке x. Совокупность всех частных значений образует вполне определенное множество $\{y\}$, называемое **множеством значений** функции.

Функция $y = f(x)$ называется **четной (нечетной),** если для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x) = f(-x)$ ($f(x) = -f(-x)$).

Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $T > 0$, что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$. Наименьшее из чисел T называют периодом функции.

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на множестве X, если существует такое число $A > 0$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $|f(x)| \le A$.

Для наглядного представления о характере функциональной зависимости часто строят графики функции.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек на плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in \{x\}$.

Простейшими элементарными функциями называются следующие функции: степенная $y = x^{\alpha}$, показательная $y = a^{x}$, логарифмическая $y = \log_a x$, тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. Свойства этих функций и их графики смотрите в [1] § 5.4.

Последовательное применение двух или нескольких функций называется **суперпозицией** этих функций.

Функции, образованные в результате суперпозиции двух или нескольких функций будем называть **сложными функциями**. Например, сложная функция $\sin(\ln x)$ образована в результате суперпозиции функций $\sin u$ и $u = \ln x$.

Элементарными функциями называются функции, полученные в результате суперпозиции простейших элементарных функций и арифметических действий.

3.Последовательности. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.

Последовательности

Определение. Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие по определенному закону некоторое вещественное число x_n, то множество занумерованных

чисел $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ называют числовой последовательностью или просто последовательностью.

Числа x_n называются **элементами или членами** последовательности. По своему определению последовательность содержит бесконечное множество элементов. Последовательность с элементами $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ обозначают также $\{ x_n \}$.

Например, $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$ — это последовательность $1, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{2n-1}, ...$, $\{1+(-1)^n\}$ — это последовательность 0, 2, 0, 2, …

Заметим, что числовая последовательность является частным случаем функции. Можно сказать, что последовательность — это функция $f: N \to R$, определенная на множестве натуральных чисел и принимающая значения из множества вещественных чисел.

Последовательность может быть задана с помощью формулы $x_n = f(n)$, которая называется **формулой общего члена последовательности**. Например, формула $x_n = n\cos\frac{(n-1)\pi}{2}$ задает последовательность $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \ldots$

Суммой двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{z_n\}$, все элементы которой равны сумме $x_n + y_n$.

Разностью двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{z_n\}$, все элементы которой равны разности $x_n - y_n$.

Произведением двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называется последовательность $\{z_n\} = \{x_n y_n\}$, **частным** — последовательность $\{z_n\} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, причем при определении частного нужно потребовать, чтобы все элементы последовательности $\{y_n\}$ были отличны от нуля.

Ограниченные и неограниченные последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если найдется положительное число A такое, что для всех членов последовательности справедливо неравенство $|x_n| \le A$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется **неограниченной**, если для любого положительного числа A найдется хотя бы один элемент последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| > A$.

Предел последовательности

Определение 1. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon)$, зависящий от ε, что при $n \geq N$ все элементы x_n этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

Последовательность $\{x_n\}$, имеющая предел, называется **сходящейся** последовательностью.

Предел последовательности $\{x_n\}$ обозначается символом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Фраза «предел последовательности $\{x_n\}$ равен a» записывается следующим образом.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Неравенство (1) означает, что, начиная с номера N, все элементы последовательности находятся внутри интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, который называют ε **-окрестностью числа** a**.**

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся, если существует такое число a, что в любой ε -окрестности числа a находятся все элементы данной последовательности, начиная с некоторого номера.

Последнее утверждение означает, что, если число a — предел последовательности, то за пределами любой его ε -окрестности находится лишь конечное число элементов данной последовательности.

Последовательность, которая не является сходящейся, называется **расходящейся.** Из определения 2 следует, что последовательность расходится, если для любого числа a найдется его ε -окрестность, за пределами которой лежит бесконечное число элементов последовательности.

Пример 1. Доказать, что предел последовательности $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ равен 1.

Пусть ε — произвольное положительное число. Заметим, что $|x_n - 1| = \left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$ при всех $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда за номер N можно принять натуральное число $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Поскольку для произвольного числа ε мы смогли определить номер N такой, что при всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Пример. Доказать, что последовательность $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ расходится.

Действительно, данная последовательность — это последовательность 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, … Пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Если, число a принадлежит интервалу $(-0{,}1;0{,}1)$, то в ε -окрестность этого числа попадут лишь члены последовательности, равные нулю, а

бесконечное число членов, равных 1 или –1, окажутся за пределами ε-окрестности. Если число a принадлежит интервалу (0,9;1,1) или (-1,1;-0,9), то за пределами ε-окрестности заведомо окажутся все нулевые члены последовательности. При всех остальных значениях числа a при достаточно малых значениях ε в ε-окрестность не попадет ни одного члена последовательности. Итак какое бы число a мы не взяли, для заданного ε найдется бесконечное число элементов последовательности, не принадлежащих ε-окрестности числа a. Следовательно, рассматриваемая последовательность расходится.

4. Предел функции.

Предельное значение функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$

Будем считать, что область задания функции $f(x)$ имеет хотя бы один элемент, лежащий вне отрезка $[-A, A]$, для любого положительного числа A.

Определение (по Коши). Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число A, что для всех значений аргумента функции x, удовлетворяющих условию $|x| > A$, справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В доказательствах нередко удобнее пользоваться другим эквивалентным определением предельного значения.

Определение (по Гейне). Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента функции соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b.

Пример. Найдем предел функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ при $x \to \infty$. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная бесконечно большая последовательность. Тогда соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) = \frac{1}{x_n^2}$ является бесконечно малой. Следовательно $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} = 0$.

Пример. Покажем, что функция $f(x) = \cos x$ не имеет предела при $x \to \infty$. Действительно, для бесконечно большой последовательности $x_n = 2\pi n$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) = \cos(2\pi n) = 1$ сходится к 1. Однако для другой бесконечно большой последовательности $x'_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ соответствующая

последовательность значений функции $f(x_n') = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ сходится к 0. Следовательно, предел функции $f(x) = \cos x$ при $x \to \infty$ не существует.

Сформулируем определение предела функции при стремлении аргумента x к бесконечности определенного знака, то есть при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Предельные значения функции в этих случаях могут оказаться различными.

Определение (по Гейне). Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента функции, элементы которой, начиная с некоторого номера, положительны (отрицательны), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b.

Пример. Найти предельные значения функции $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

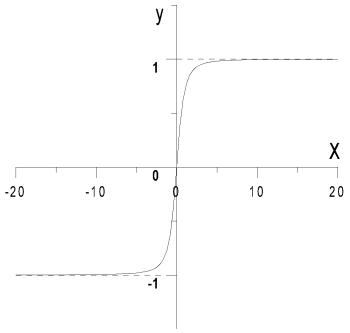


Рис. 1

На рис. 1 приведен график заданной функции. Мы видим, что при $x \to +\infty$ график функции приближается к прямой $y = 1$, а при $x \to -\infty$ — к прямой $y = -1$. Покажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная бесконечно большая последовательность, все элементы которой, начиная с некоторого номера, положительны. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{|x_n|\sqrt{1+1/x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/x_n^2}} = 1.$$

Если все члены бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, отрицательны, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{|x_n|\sqrt{1+1/x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+1/x_n^2}} = -1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

Односторонние пределы

Определение. Число b называется **правым (левым) пределом** функции $f(x)$ в точке a, если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента функции, все элементы которой больше (меньше) a, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к b.

Такие пределы называются **односторонними пределами**.

Правый предел обозначают символом $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, а левый — $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$. Правый и левый предел функции в точке могут принимать как равные, так и отличные друг о друга значения.

Пример. Найдем правый и левый пределы функции $f(x)=\frac{|x|}{x}$ при $x\to 0$. Возьмем произвольную сходящуюся к a последовательность $\{x_n\}$, все элементы которой больше нуля. Тогда $f(x_n)=\frac{x_n}{x_n}=1$ и $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=1$. Пусть все члены сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ меньше нуля. В этом случае $f(x_n)=\frac{-x_n}{x_n}=-1$ и $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=-1$.

Теорема. Если в точке a правые и левые пределы функции $f(x)$ равны, то в этой точке существует предельное значение функции, равное указанным односторонним пределом.

5. Замечательные пределы.

Теорема. Предельное значение функции $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ существует и равно единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \qquad (2)$$

Равенство (2) называют первым замечательным пределом.

Доказательство. Если $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, то справедливо неравенство

$$0<\sin x<x<\operatorname{tg} x.$$

Разделим его на $\sin x>0$. В результате получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

откуда имеем

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \qquad (3)$$

В силу четности функций $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ неравенство (3) справедливо и для $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, то из неравенства (3) следует, что функции $\frac{\sin x}{x}$ также имеет в точке $x=0$ предельное значение, равное единице.

Формулу (1) можно записать в более общем виде: пусть $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}\cdot\dfrac{x}{5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5}=0$.

Следствия из первого замечательного предела

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

Второй замечательный предел

Теорема. Предельное значение функции $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to\infty$ существует и равно e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \quad (4)$$

Второй замечательный предел также записывают в виде

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \quad (5)$$

Здесь e — это иррациональное число, приблизительно равное 2,718281828459045… Число e также, как число π, играет в математике важную роль. Логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается $\ln x$, то есть $\log_e x=\ln x$. Показательная функция с основанием e (e^x) называется экспоненциальной функцией или экспонентой.

Рассмотрим пример из банковской сферы, приводящий ко второму замечательному пределу.

Пример 3. Банк принимает деньги у населения под p % годовых. Во сколько раз возрастет сумма вклада за год, если проценты начислять: 1) в конце года; 2) в конце каждого месяца (с пересчетом суммы вклада); 3) «ежемгновенно».

1) Пусть S — первоначальная сумма вклада. Тогда через год она увеличится на величину $\Delta S=S\dfrac{p}{100}$, то есть вырастет в $\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$ раз.

2) Если проценты начисляются ежемесячно, то по истечению первого месяца сумма вклада увеличится на величину $\Delta S_1=S\dfrac{p}{12\cdot 100}$ и будет равна $S_1=S\left(1+\dfrac{p}{12\cdot 100}\right)$, то есть увеличится в $1+\dfrac{p}{12\cdot 100}$ раз. Через месяц на сумму S_1 опять начислят $\dfrac{p}{12}$ %, и вклад снова

увеличится в $1+\frac{p}{12\cdot 100}$ раз. Таким образом, через год на счету вкладчика будет сумма в $\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12}$ раз большая первоначального вклада.

Разделим год на n периодов. По истечению каждого периода банк начисляет $\frac{p}{n}$ %, пересчитывая сумму вклада. Тогда через год сумма вклада возрастет в $\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^{n}$ раз. Устремим $n\to\infty$ и найдем предельное значение $\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^{n}$. Введем обозначение $x=\frac{p}{n\cdot 100}$. Очевидно, что $x\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{n\cdot 100}\right)^{n}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{p}{100}}=e^{\frac{p}{100}}.$$

Итак, если проценты начислять «ежемгновенно» то сумма вклада возрастет за год в $e^{\frac{p}{100}}$ раз.

Следствия из второго замечательного предела

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$.

3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

4) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

6.Понятие непрерывности функции в точке и на отрезке. Понятие непрерывности функции

Пусть функция $f(x)$ определена в точке $x=a$ и любая ε-окрестность точки a содержит отличные от a точки области задания этой функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке a ,** если предельное значение этой функции в точке a существует и равно частному значению $f(a)$, то есть, если

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a). \qquad (1)$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a} x = a$, то равенство (1) можно представить в виде

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x).$$

Следовательно, для непрерывной функции знак предела можно вносить под знак функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа (слева) в точке a,** если правое (левое) предельное значение этой функции в точке a существует и равно частному значению $f(a)$.

Заметим, что если правое и левое предельные значения $f(x)$ в точке a существуют и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a),$$

то предельное значение $f(x)$ в точке a также существует и равно $f(a)$. Следовательно, если функция непрерывна в точке a справа и слева, то она непрерывна в этой точке.

Определение. Точки, в которых функция не является непрерывной, называются **точками разрыва** функции.

Определение. Функция называется **непрерывной на множестве** $\{x\}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Ранее мы доказали, что для любого вещественного числа a $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$, $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$, $\lim\limits_{x\to a} P_n(x) = P_n(a)$, где $P_n(x)$ — алгебраический многочлен порядка n. Следовательно, функции x^n, $\sin x$, $\cos x$, $P_n(x)$ являются непрерывными на всей числовой оси. Функция $\operatorname{tg} x$ имеет разрывы в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, так как она не определена в этих точках. Функция $\operatorname{ctg} x$ не определена и, следовательно, имеет разрывы в точках $x = \pi k$.

7.Свойства непрерывных функций. Теоремы о непрерывных функциях

Теорема (об устойчивости знака непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, и если $f(a) \neq 0$, то найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех значений аргумента из указанной δ-окрестности функция $f(x)$ не обращается в нуль и имеет знак, совпадающий со знаком $f(a)$.

Определение. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна в каждой точке внутри отрезка, непрерывна справа в точке a $\left(\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)\right)$ и непрерывна слева в точке b $\left(\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)\right)$.

Теорема (о прохождении непрерывной функции через нуль при смене знака). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах отрезка

значения разных знаков. Тогда внутри отрезка $[a,b]$ найдется хотя бы одна точка ξ, в которой функция обращается в нуль ($f(\xi)=0$).

Из этой теоремы следует, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то уравнение $f(x)=0$ имеет на этом отрезке хотя бы одно решение.

Теорема (о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем $f(a)=A$, $f(b)=B$. Пусть C — любое число, заключенное между A и B. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка ξ такая, что $f(\xi)=C$.

Прежде, чем сформулировать следующие теоремы напомним определение ограниченной функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $\{x\}$, если найдется такое вещественное число M (m), что для всех значений аргумента x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство $f(x)\le M$ ($f(x)\ge m$).

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $\{x\}$, если она ограничена на этом множестве сверху и снизу, то есть если найдутся такие вещественные числа M и m, что для всех значений аргумента x из множества $\{x\}$ справедливы неравенства $m\le f(x)\le M$.

Заметим, что последнее неравенство можно заменить неравенством $|f(x)|\le A$, где $A=\max(|m|,|M|)$, и сформулировать следующее определение ограниченной функции: функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве $\{x\}$, если найдется такое положительное вещественное число A, что для всех значений аргумента x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство $|f(x)|\le A$.

Функция $f(x)$ имеет на множестве $\{x\}$ **наибольшее значение**, если найдется точка $x_0\in\{x\}$ такая что $f(x)\le f(x_0)$ для любого $x\in\{x\}$.

Функция $f(x)$ имеет на множестве $\{x\}$ **наименьшее значение**, если найдется точка $x_0\in\{x\}$ такая что $f(x)\ge f(x_0)$ для любого $x\in\{x\}$.

Теорема (Вейерштрасса) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке и имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение.

Заметим, что если множество $\{x\}$ не является отрезком, то функция может быть неограниченной на рассматриваемом множестве и не иметь наибольшего или наименьшего значения.

Например, функция $f(x)=1/x$ ограничена на отрезке $[a,1]$ ($0<a<1$), имеет наибольшее значение $f_{\text{наиб.}}=1/a$ и наименьшее значение $f_{\text{наим.}}=1$. Однако эта функция будет неограниченной сверху на интервале (0,1) и на этом интервале у нее нет наибольшего значения Заметим также, что несмотря на то, что функция ограничена снизу

($1/x>1$ для любого $x\in(0,1)$) она не имеет наименьшего значения, так как 1 не принадлежит области значений функции на рассматриваемом интервале.

Экспоненциальная функция $f(x)=e^x$ также ограничена на любом отрезке вещественной оси и имеет на этом отрезке наибольшее $f_{\text{наиб.}}=e^b$ и наименьшее $f_{\text{наим.}}=e^a$ значения, но на всей числовой прямой экспонента неограниченна сверху, следовательно, у нее не существует наибольшего значения. Снизу функция ограничена, так как $e^x>0$, однако 0 не является наименьшим значением, так не принадлежит области значений функции (нет точки x_0 такой, что $e^{x_0}=0$).

8.Производная.ЕЕ геометрический смысл.

Понятие производной

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Зададим аргументу x приращение Δx такое, что значение $x_0+\Delta x$ находится в указанной окрестности точки x_0. **Приращением функции** $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx называется число

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0). \qquad (2)$$

Определение. Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел (если он существует) при $\Delta x\to 0$ отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента.

Производную функции $y=f(x)$ в точке x_0 будем обозначать символом $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$. По определению производной

$$y'(x_0)=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Если функция $y=f(x)$ определена на некотором интервале (a,b), то в любой фиксированной точке x этого интервала аналогичным образом определяются приращение и производная в точке x:

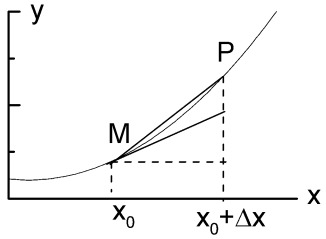
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),$$

$$y'(x)=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (3')$$

Пользуясь определением производной, получим формулы для вычисления производных некоторых элементарных функций.

Геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале (a,b) и непрерывна в точке x_0, принадлежащей этому интервалу. Пусть $x_0 + \Delta x \in (a,b)$, $y_0 = f(x_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Возьмем на графике функции две точки: $M(x_0, y_0)$ и $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Заметим, что $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y = y_0 + \Delta y$, следовательно, точка P имеет координаты $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Проведем секущую MP.



Касательной к графику функции в точке x_0 будем называть предельное положение секущей MP при стремлении точки P к точке M, то есть если расстояние $|MP| \to 0$.

Покажем, что расстояние $|MP|$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Действительно, $|MP| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ и, в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} |MP| = 0$.

Итак, касательная к графику функции в точке x_0 — это предельное положение секущей при $\Delta x \to 0$.

Предположим, что функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, и докажем, что график функции имеет в данной точке $M(x_0, y_0)$ касательную, а угловой коэффициент указанной касательной равен $f'(x_0)$.

Обозначим угол наклона секущей MP через $\varphi(\Delta x)$. Этот угол, очевидно, зависит от Δx. Найдем угловой коэффициент секущей MP

$$k(\Delta x) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Угловой коэффициент секущей MP при $\Delta x \to 0$ стремится к угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке x_0, следовательно,

$$k_0 = \lim_{\Delta x \to 0} k(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Итак, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции, проведенной в точке $M(x_0, y_0)$. Уравнение касательной имеет вид

$$y = k_0(x - x_0) + y_0 \text{ или } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Заметим, что если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то $\varphi \to \pi/2$. В этом случае касательная перпендикулярна оси X и имеет уравнение $x = x_0$.

Бином Ньютона.

$$(a + b)^n = a^n + n_a^{n-1} \times b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + b^n$$

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$; n!=1×2×3×…× n=$n_x^{n-1}$

9. Понятие дифференцируемости функции в точке. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости в точке. Понятие дифференцируемости функции

Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Обозначим символом Δx любое приращение аргумента, такое, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности точки x_0.

Определение. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (1)$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Заметим, что поскольку $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Следовательно, $\alpha(\Delta x)\Delta x$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, и обозначается $o(\Delta x)$. Учитывая это обозначение, формулу (3) можно также записать в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad (2)$$

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.

Доказательство необходимости. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то есть ее приращение представимо в виде (1). Разделим равенство (1) на $\Delta x \neq 0$ и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. В результате получим

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = A.$$

Отсюда следует, что в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$, равная A.

Доказательство достаточности. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную, то есть существует предельное значение

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

В силу определения предельного значения, разность $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$. Отсюда имеем

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \quad (3)$$

Данное представление приращения функции совпадает с представлением (1), если обозначить через A не зависящее от Δx число $f'(x_0)$. Следовательно, функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0.

Правила дифференцирования также были сформулированы в предыдущей лекции. Докажем теперь некоторые из них.

1**.** Пусть функция $f(x)$ имеет производную в данной точке x. Тогда функция $Cf(x)$, где C — постоянная, также имеет в этой точке производную, причем $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

Рассмотрим функцию $y = Cf(x)$. Найдем приращение этой функции в данной точке x, соответствующее приращению аргумента Δx

$$\Delta y = Cf(x + \Delta x) - Cf(x) = C(f(x + \Delta x) - f(x)) = C\Delta f$$.

По определению производной имеем

$$y' = (Cf(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C\Delta f}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = Cf'(x)$$.

2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в данной точке x. Тогда сумма и разность этих функций также имеют в этой точке производные, причем

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$.

Пусть $y = f(x) \pm g(x)$. Тогда

$$\Delta y = (f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x)) = (f(x + \Delta x) - f(x)) \pm (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f \pm \Delta g$$

,

$$y' = (f(x) \pm g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \pm \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) \pm g'(x)$$.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в данной точке x. Тогда произведение этих функций также имеет в этой точке производную, причем $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Обозначим Δy, Δf и Δg приращения функций $y = f(x)g(x)$, $f(x)$ и $g(x)$ в точке x, соответствующие приращению аргумента Δx. Заметив, что $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$, $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g$, найдем приращение Δy

$$\Delta y = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) = (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) = \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g$$.

Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производную в точке x, то они непрерывны в этой точке. Следовательно, $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ и $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta g = 0$. Учитывая эти равенства и определение производной, получим

$$y' = (f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta g = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$.

4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в данной точке x. Тогда частное этих функций при условии, что $g(x) \neq 0$, также имеет в этой точке производную, причем $(f(x)/g(x))' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/g^2(x)$.

Правило дифференцирования частного доказывается аналогично предыдущим.

10Таблица производных.
Таблица производных простейших элементарных функций

1. $(C)' = 0$, где C — постоянная;
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \neq 0$;
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$;
4. $(e^x)' = e^x$;
5. $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$, $a > 0$, $a \neq 1$;
6. $(\ln x)' = 1/x$;
7. $(\sin x)' = \cos x$;
8. $(\cos x)' = -\sin x$;
9. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$;
10. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$;
11. $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$;
12. $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$;
13. $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$;
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$.

11 Производная обратной и сложной функции.
Теорема о производной обратной функции

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0 и пусть в этой точке существует конечная производная $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, равную $1/f'(x_0)$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, то в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ определена непрерывная и строго монотонная обратная функция $x = f^{-1}(y)$. Придадим аргументу y этой обратной функции в точке y_0 приращение $\Delta y \neq 0$. Приращение обратной функции $\Delta x = x - x_0$ в точке y_0, соответствующее приращению аргумента Δy, в силу строгой монотонности обратной функции также будет отлично от нуля. Причем в силу непрерывности обратной функции $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Тогда

$$x'(y_0) = \left(f^{-1}(x_0)\right)' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Производная сложной функции

Теорема. Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x)) = F(x)$ дифференцируема в указанной точке x_0 и справедлива следующая формула

$$y'(x) = F'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0) .$$

Используя, таблицу производных, правила дифференцирования и формулу дифференцирования сложной функции можно вычислить производную любой элементарной функции.

Получим, например, формулы для производных функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} .$$

Пример. Найти производную функции $y = e^{x^2}$.

Применим формулу дифференцирования сложной функции. В данном случае $u = \varphi(x) = x^2$, $y = f(u) = e^u$. Тогда

$$y'(x) = \left(e^u\right)' u'(x) = e^u \left(x^2\right)' = e^{x^2} 2x .$$

Теперь, используя понятие дифференцируемости, мы можем доказать **теорему о производной сложной функции**, сформулированную в предыдущей лекции.

Теорема. Пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x)) = F(x)$ дифференцируема в указанной точке x_0 и справедлива следующая формула

$$y'(x) = F'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0) .$$

Доказательство. Функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, следовательно,

$$\Delta u = \varphi'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x ,$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Поскольку дифференцируемая в точке x_0 функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в этой точке, то $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Так как функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то ее приращение также можно представить в виде

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \beta(\Delta u)\Delta u,$$

где $\beta(\Delta u)$ — бесконечно малая при $\Delta u \to 0$. Подставляя в последнее равенство выражение для Δu, получим

$$\Delta y = f'(u_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(u_0)\alpha(\Delta x)\Delta x + \varphi'(x_0)\beta(\Delta u)\Delta x + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)\Delta x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\varphi'(x_0) + f'(u_0)\alpha(\Delta x) + \varphi'(x_0)\beta(\Delta u) + \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x).$$

Поскольку $f'(u_0)\alpha(\Delta x),\ \varphi'(x_0)\beta(\Delta u),\ \beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)$ — величины бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, то

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

Теорема доказана.

12. Логарифмическая производная. Логарифмическая производная

Пусть функция $y = f(x)$ положительна и дифференцируема в данной точке x. Тогда в этой точке существует $\ln y = \ln f(x)$. Рассматривая $\ln f(x)$ как сложную функцию аргумента x, можно вычислить производную этой функции, принимая $y = f(x)$ за промежуточный аргумент. Получим

$$(\ln f(x))' = y' / y.$$

Эта производная называется логарифмической производной функции $y = f(x)$ в данной точке x.

Производная степенной функции с произвольным вещественным показателем

Рассмотрим степенную функцию $y = x^\alpha$, где α — произвольное вещественное число. Эта функция определена при $x > 0$ для любого вещественного показателя α. Найдем логарифмическую производную данной функции

$$(\ln y)' = y' / y = (\ln x^\alpha)' = (\alpha \ln x)' = \alpha / x.$$

Отсюда получим

$$y' = y(\alpha / x) = x^\alpha (\alpha / x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

$$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Производная степенно-показательной функции

Степенно-показательной функцией называется функция $y = u(x)^{v(x)}$, где $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывные функции, и $u(x) > 0$. Найдем вначале логарифмическую производную этой функции

$$(\ln y)' = y' / y = \left(\ln u(x)^{v(x)}\right)' = \left(v(x)\ln u(x)\right)',$$

$$y' / y = v'(x)\ln u(x) + v(x)u'(x) / u(x).$$

Отсюда получим

$$y' = y(v'(x)\ln u(x) + v(x)u'(x)/u(x)),$$
$$y' = u(x)^{v(x)}(v'(x)\ln u(x) + v(x)u'(x)/u(x)).$$

13.Понятие дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Использование дифференциала в приближенных вычислениях.

Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то есть ее приращение в этой точке, соответствующее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \quad (1)$$

Заметим, что в этой формуле $\alpha(\Delta x)\Delta x$ — это бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ более высокого порядка, чем Δx. Поскольку $A\Delta x$ при $\Delta x \neq 0$ является бесконечно малой того же порядка, что и Δx, то говорят, что $A\Delta x$ — это главная часть приращения функции.

Главная линейная часть приращения функции $A\Delta x$ называется **дифференциалом функции** в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, и обозначается символом dy или $df(x_0)$.

Под дифференциалом независимой переменной x можно понимать любое, не зависящее от x, число. Обычно берут это число равным приращению Δx независимой переменной. Тогда

$$dy = Adx. \quad (2)$$

Если учесть, что $A = f'(x_0)$, то формулу (2) можно переписать в виде

$$dy = f'(x_0)dx. \quad (3)$$

Из последнего выражения следует, что производная функции $y = f(x)$ равна отношению дифференциала функции dy к дифференциалу аргумента dx

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Из формулы (3) также следуют правила вычисления дифференциалов, связанные с арифметическими действиями:

$dC = (C)'dx = 0$ (C — постоянная);

$dCy(x) = (Cy)'dx = Cy'dx = Cdy$ (C — постоянная);

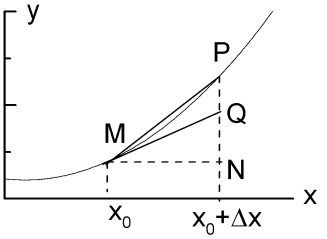
$d(f(x) + g(x)) = (f'(x) + g'(x))dx = f'(x)dx + g'(x)dx = df + dg$;

$d(f(x)g(x)) = (f(x)g(x))'dx = f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx = gdf + fdg$;

$$d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'dx = \frac{f'(x)g(x)dx - f(x)g'(x)dx}{g^2(x)} = \frac{g(x)df - f(x)dg}{g^2(x)}.$$

Геометрический смысл дифференциала функции

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть точка M на графике функции соответствует значению аргумента x_0, а точка P — значению аргумента $x_0 + \Delta x$. В точке M проведем касательную к графику функции. Обозначим точку пересечения касательной и вертикальной прямой $x = x_0 + \Delta x$ через Q. Проведем также прямую MN, параллельную оси OX. Заметим, что приращение функции Δy в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, равно $|NP|$. Рассмотрим прямоугольный треугольник QMN. Угол $\alpha = \angle QMN$ — это угол наклона касательной, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Тогда $|NQ| = \operatorname{tg}\alpha \cdot |MN| = f'(x_0)\Delta x = dy$, то есть дифференциал функции в точке x_0 равен приращению переменной y на касательной, проведенной к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$. Поскольку длины отрезков NP и NQ различны, то $\Delta y \neq dy$. Однако $dy \to \Delta y$ при $\Delta x \to 0$.



.

14.Производные и дифференциал высших порядков.

Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда ее производная $f'(x)$ представляет собой функцию переменной x также определенную на интервале (a,b). $f'(x)$ в свою очередь может оказаться дифференцируемой в некоторой точке x интервала (a,b). Производную от функции $f'(x)$ называют второй производной (производной второго порядка) от функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$ или y''. Итак,

$$y'' = f''(x) = \left(f'(x)\right)'.$$

Далее мы можем аналогично ввести понятие третьей производной, как производной от второй:

$$y''' = f'''(x) = \left(f''(x)\right)',$$

затем четвертой и т. д.

Предположим, что уже введено понятие производной $(n-1)$-ого порядка, и что $(n-1)$-я производная дифференцируема в некоторой точке x интервала (a,b), то есть имеет производную в данной точке. Тогда эту производную называют производной n-ого порядка функции $y = f(x)$ и

обозначают символами $y^{(n)}(x)$ или $f^{(n)}(x)$. Соотношение, определяющее n-ю производную имеет вид

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Определение. Функция, имеющая на данном множестве $\{x\}$, конечную производную порядка n называется n раз дифференцируемой на данном множестве.

Пример. Найти n-ю производную степенной функции $y = x^{\alpha}$.

По формуле производной степенной функции имеем

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$y'' = \left(\alpha x^{\alpha-1}\right)' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

$$y''' = \left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\right)' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

Предположим, что n-я производная задается формулой

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}, \quad (1)$$

где произведение $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$ содержит n сомножителей. Тогда

$$y^{(n+1)} = \left(\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}\right)' = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{\alpha-n-1},$$

то есть формула для $(n+1)$-ой производной имеет тот же вид, что и формула для n-ой производной. Следовательно, по принципу математической индукции формула (1) справедлива для любого значения n.

В частном случае $\alpha = m$, где m — натуральное число, получим

$$\left(x^m\right)^{(m)} = m\cdot(m-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1\cdot x^{m-m} = m\cdot(m-1)\cdot...\cdot 2\cdot 1 = m!, \quad (2)$$

где $m!$ — это произведение натуральных чисел от 1 до m, называемое m факториалов, то есть $m! = 1\cdot 2\cdot ...\cdot m$. Например,

$$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6,$$

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$$

Заметим, что $0!$ считают равным 1. Для факториалов справедливо рекуррентное соотношение

$$(m+1)! = (m+1)\cdot m!$$

Поскольку производная порядка m функции x^m не зависит от x, то из формулы (2) следует, что $\left(x^m\right)^{(m+1)} = 0$, и все производные порядка $n > m$ также равны 0.

Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором интервале (a,b). Ее дифференциал

$$dy = f'(x)dx,$$

называемый также первым дифференциалом, зависит от двух переменных: x и dx. Далее будем считать, что величина dx принимает одно и то же фиксированное значение для всех точек x

рассматриваемого интервала. Тогда дифференциал dy можно рассматривать как функцию только одной переменной x. Предположим, что функция $f'(x)$ также дифференцируема в точке x_0, принадлежащей интервалу (a,b). При таких предположениях в указанной точке у функции dy существует дифференциал $d(dy)$. При вычислении этого дифференциала положим значение дифференциала независимой переменной равным уже зафиксированному ранее значению dx.

Определение. Значение дифференциала от dy, взятое при фиксированном значении dx, называют вторым дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначают символом d^2y.

Согласно определению второго дифференциала имеем

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = \left(f'(x)dx\right)' dx = (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2 . \quad (5)$$

При выводе последней формулы мы учли, что, так как dx не зависит от x, то $\left(f'(x)dx\right)' = f''(x)dx$. Заметим, что $(dx)^2$ обычно обозначают dx^2. Итак,

$$d^2y = f''(x)dx^2 . \quad (6)$$

Совершенно аналогично можно определить дифференциалы высших порядков. Предположив, что производная $(n-1)$-ого порядка функции $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, определим дифференциал n-ого порядка d^ny, как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка, то есть

$$d^ny = d(d^{n-1}y) . \quad (7)$$

Формула для вычисления дифференциала n-ого порядка имеет вид, аналогичный формуле (6)

$$d^ny = f^n(x)(dx)^n = f^n(x)dx^n .$$

Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть сложная функция $y = f(x)$, аргумент которой представляет собой дифференцируемую функцию $x = \varphi(t)$, дифференцируема в некоторой точке x. Будем считать переменную t независимой переменной. Тогда по формуле (3)

$$dy = y'(t)dt .$$

Отсюда, используя формулу дифференцирования сложной функции

$$y'(t) = f'(x)\varphi'(t) ,$$

и учитывая, что

$$\varphi'(t)dt = dx ,$$

получим

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt = f'(x)dx . \quad (4)$$

Итак, мы установили, что формула для дифференциала функции имеет один и тот же вид независимо от того является ли аргумент функции независимой переменной, или он в свою очередь представляет собой функцию другой переменной. В любом случае дифференциал функции равен произведению производной по ее аргументу на дифференциал данного аргумента. Это свойство дифференциала называется инвариантностью формы первого дифференциала.

15. Правило Лопиталя.
Правило Лопиталя

Говорят, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \to a$ неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Раскрыть эту неопределенность — это значит найти предельное значение $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Следующая теорема дает правило для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема 1 (правило Лопиталя). Пусть две функции определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением может быть самой точки a. Пусть далее

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \tag{5}$$

и $g'(x) \neq 0$ всюду в указанной выше окрестности точки a. Тогда, если существует конечное или бесконечное предельное значение $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предельное значение $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если две функции имеют при $x \to a$ бесконечные предельные значения, то есть

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty, \tag{6}$$

то говорят, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \to a$ неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия этой неопределенности справедливо утверждение аналогичное теореме 1.

Теорема 2. Пусть две функции определены и дифференцируемы всюду в некоторой окрестности точки a, за исключением может быть самой точки a. Пусть далее

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty \tag{5}$$

и $g'(x) \neq 0$ всюду в указанной выше окрестности точки a. Тогда, если существует конечное или бесконечное предельное значение $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и предельное значение $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Заметим, что правило Лопиталя справедливо и в случае, когда аргумент x стремится не к конечному, а бесконечному пределу ($x \to +\infty, x \to -\infty$).

Заметим также, что если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применять повторно, то есть предельное

значение отношения первых производных функций $f(x)$ и $g(x)$ можно заменить предельным значением отношения вторых производных. Тогда мы получим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Пример 1. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Так как $\lim_{x\to 0}\left(e^x-e^{-x}\right)=0$ и $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=0$, то имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{\left(\ln(1+x)\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1/(1+x)}=2.$$

Пример 2. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln x}$.

Здесь $\lim_{x\to\infty}x^2=\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$, то есть имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Воспользовавшись правилом Лопиталя получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1/x}=\lim_{x\to\infty}2x^2=\infty.$$

16.Исследование гр ф-ции с помощью производной.Точки экстремума, необходимые и достаточные условия.

Экстремум функции

Необходимое условие экстремума

Функция g(x) в точке x_0 имеет экстремум(максимум или минимум), если функция определена в двухсторонней окрестности точки x_0 и для всех точек x некоторой области: $0<|x-x_0|<\delta$, выполнено соответственно неравенство

$g(x)<g(x_0)$(в случае максимума) или $g(x)>g(x_0)$(в случае минимума).

Экстремум функции находиться из условия: $g'(x_0)=0$, если производная существует, т.е. приравниваем первую производную функции к нулю.

Достаточное условие экстремума

1) *Первое достаточное условие*:

Если:

а) f(x) непрерывная функция и определена в некоторой окрестности точки x_0 такой, что первая производная в данной точке равна нулю или не существует.

б) f(x) имеет конечную производную в окрестности задания и непрерывности функции

в) производная сохраняет определенный знак справа от точки x_0 и слева от этой же точки, тогда точку x_0 можно охарактеризовать следующим образом

	Знак производной		Вывод
	x < x0	x > x0	
1	+	+	Экстремума нет
2	+	-	максимум
3	-	+	минимум
4	-	-	Экстремума нет

Это условие не очень удобное, так как нужно проверять множество условий и запоминать таблицу, однако если ничего не сказано о производных высших порядках, то это единственный способ найти экстремум функции.

2) *Второе достаточное условие*

Если функция g(x) обладает второй производной $g''(x)$ причем в некоторой точке x_0 первая производная равна нулю, а вторая производная отлично от нуля. Тогда точка x_0 экстремум функции g(x), причем если $g''(x_0) > 0$, то точка является максимумом; если $g''(x_0) < 0$, то точка является минимумом.

3) *Третье достаточное условие*

Пусть функция g(x) имеет в некоторой окрестности точки x_0 N производных, причем значение первых (N - 1)- ой и самой функции в этой точке равно нулю, а значение N-ой производной отлично от нуля. В таком случае:

а) Если N - четно, то точка x_0 экстремум функции: $g^{(N)}(x_0) < 0$ у функции точка максимума, $g^{(N)}(x_0) > 0$ у функции точка минимума.

б) Если N - нечетно, то в точке x_0 у функции g(x) экстремума нет.

Абсолютный экстремум

Наибольшее(наименьшее) значение на сегменте [a;b] непрерывной функции g(x) достигается или в критической точке этой функции(т.е. где производная равна нулю или не существует), или в граничных точках a и b данного сегмента.

17.Точки перегиба. Необходимое и достаточное условия существования точки перегиба, направление выпуклости.

Точки перегиба графика функции

Определение. Точка $M(c, f(c))$ графика функции $y = f(x)$ называется точкой перегиба этого графика, если существует такая окрестность точки $x = c$ оси абсцисс, в пределах которой график функции справа и слева от точки c имеет разные направления выпуклости.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и ее окрестности, то геометрически это означает, что график функции переходит в окрестности точки $M(c, f(c))$ с одной стороны касательной на другую (рис. 3).

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке c, дифференцируема в окрестности точки c, за исключением самой точки c, и $\lim\limits_{x \to c} f'(x) = \infty$, то график функции в окрестности точки $M(c, f(c))$ находится по разные стороны от вертикальной касательной $x = c$ (рис. 4).

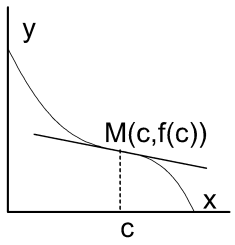


Рис. 3

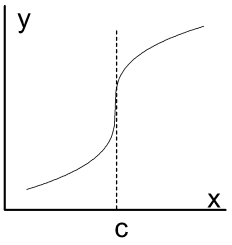


Рис. 4

Теорема 3 (необходимое условие существования точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x = c$ непрерывную вторую производную. Тогда, если точка $(c, f(c))$ является точкой перегиба графика функции, то $f''(c) = 0$.

Заметим, что условие $f''(c) = 0$ является необходимым, но недостаточным условием перегиба графика функции в точке $(c, f(c))$. Рассмотрим, например функцию $f(x) = x^4$. Вторая производная этой функции $f''(x) = 12x^2$, обращается в нуль точке $x = 0$. Однако на всей числовой оси $f''(x) \geq 0$, следовательно, всюду на этой оси график функции имеет выпуклость, направленную вниз, и точка $(0,0)$ не является точкой перегиба.

Теорема 4 (достаточное условие наличия точки перегиба). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = c$, дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c, за исключением, быть может, самой точки c и вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе аргумента через точку c, то точка $(c, f(c))$ является точкой перегиба графика функции.

Заметим, что если функция непрерывна в точке $x = c$, дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c, за исключением самой точки c, и имеет в точке $(c, f(c))$ касательную (хотя бы параллельную оси Oy), то утверждение теоремы 4 также справедливо.

Пример 1. Найти точки перегиба графика функции $y = -(x-1)^3(x+2) - \frac{x}{2} + 2$.

Найдем производные заданной функции:

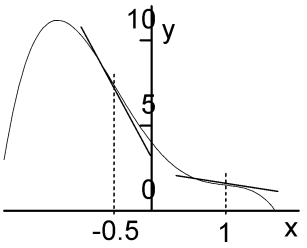
$$y' = -3(x-1)^2(x+2) - (x-1)^3 - 1/2,$$

$$y'' = -6(x-1)(x+2) - 3(x-1)^2 - 3(x-1)^2 = -6(x-1)(x+2+x-1) = -12(x-1)(x+1/2).$$

Вторая производная

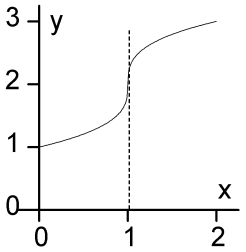
$$y'' = -12(x-1)(x+1/2)$$

обращается в нуль в точках $x=1$, $x=-1/2$ и меняет знак при переходе через эти точки. Следовательно, точки $x=1$ и $x=-1/2$ являются точками перегиба графика функции. Заметим также, что на интервалах $(-\infty,-1/2)$ и $(1,\infty)$ $y''<0$, следовательно, график функции имеет выпуклость, направленную вверх. На интервале $(-1/2,1)$ $y''>0$, и график функции имеет выпуклость, направленную вниз.



Пример 2. Найти точки перегиба графика функции $y=\sqrt[3]{x-1}+2$.

Эта функция непрерывна на всей числовой оси и имеет конечную вторую производную $y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}}$ всюду на числовой прямой, за исключением точки $x=1$. Причем при $x<1$ $y''>0$, а при $x>1$ $y''<0$. В точке $x=1$ первая производная функции $y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$ не определена. Поскольку $\lim\limits_{x\to 1} y'(x)=\infty$, то график функции имеет в точке (1,2) вертикальную касательную. Так как вторая производная меняет знак при переходе через точку $x=1$, то точка (1,2) является точкой перегиба.



Направление выпуклости графика функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в любой точке интервала (a,b), то есть имеет в любой точке этого интервала конечную производную. Тогда существует касательная к графику функции $y=f(x)$, проходящая через любую точку $M(x,f(x))$ этого графика $(a<x<b)$, причем эта касательная не параллельна оси Oy.

Определение. Говорят, что график функции $y=f(x)$ имеет на интервале (a,b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

На рис. 1 изображен график функции, выпуклой вниз, а на рис. 2 — выпуклой вверх.

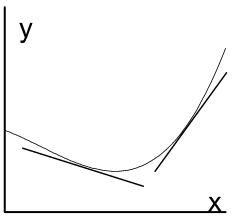


Рис. 1

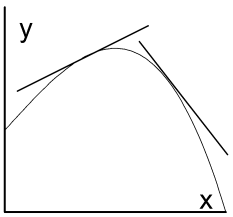


Рис. 2

Теорема 1. Если функция $y=f(x)$ имеет на интервале (a,b) конечную вторую производную и если эта производная неотрицательна (неположительна) всюду на этом интервале, то график функции имеет на интервале (a,b) выпуклость, направленную вниз (вверх).

Теорема 2. Пусть вторая производная функции $y = f(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке $x = c$, тогда существует такая окрестность точки c, в пределах которой график функции имеет выпуклость, направленную вниз (вверх).

18.Асимптоты графика функции.

Асимптоты графика функции

Определение. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Заметим, что если прямая $x = a$, является вертикальной асимптотой, то точка a — это точка разрыва второго рода, в которой функция $f(x)$ не определена. Поэтому для того, чтобы найти вертикальные асимптоты нужно исследовать точки, в которых функция не определена.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предельных значения

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{1}$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - kx) = b. \tag{2}$$

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$.

Данная функция не определена в точке $x = -1$. Найдем предельное значение функции при $x \to -1$

$$\lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} = \pm\infty.$$

Следовательно, график этой функции имеет вертикальную асимптоту $x = -1$.

Чтобы выяснить, есть ли у графика функции наклонные асимптоты, найдем предельные значения (1), (2):

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x + 1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{(x + 1)} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x - 2}{(x + 1)} = -4.$$

Итак, прямая $y = x - 4$ является наклонной асимптотой графика при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

19.ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Понятие первообразной функции

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если в любой точке x этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема, и ее производная $F'(x)$ равна $f(x)$.

Свойства первообразных

1) Если функция $F(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то и функция $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, также является первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b).

Действительно,

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

2) Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то повсюду на этом интервале $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C — некоторая постоянная.

Положим $F_1(x) - F_2(x) = \Phi(x)$. Так как каждая из функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), то и $\Phi(x)$ дифференцируема на этом интервале. Причем всюду на интервале (a,b) справедливо равенство

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Так как производная $\Phi'(x)$ равна нулю в любой точке интервала (a,b), то функция $\Phi(x)$ является постоянной на этом интервале.

3) Если функция $F(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то любая первообразная функция $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на интервале (a,b) имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная.

Это утверждения является следствием свойства 2.

Неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)dx$ — подынтегральным выражением, $f(x)$ — подынтегральной функцией, x. — переменной интегрирования.

Если функция $F(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то в силу приведенного выше следствия

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Заметим также, что, если для функции $f(x)$ на интервале (a,b) существует первообразная функция, то подынтегральное выражение представляет собой дифференциал любой первообразной. Действительно, если $F(x)$ является первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то $f(x)dx = F'(x)dx = dF$.

20.Свойства неопределенного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ имеет на некотором интервале первообразную функцию $F(x)$. Неопределенный интеграла имеет следующие свойства:

1. $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$.

Действительно, используя определение неопределенного интеграла, имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right)=d(F(x)+C)=F'(x)dx=f(x)dx.$$

2. $\int dF=F(x)+C$.

Так как $dF=F'(x)dx$, а первообразной для функции $F'(x)$ является функция $F(x)$, то согласно определению неопределенного интеграла получим

$$\int dF=\int F'(x)dx=F(x)+C.$$

3. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

Пусть $G(x)$ — первообразная для функции $g(x)$. Тогда свойство 3 можно записать в виде

$$\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=F(x)+G(x)+C,$$

Следовательно, свойство 3 означает, что $F(x)+G(x)$ — это первообразная для функции $f(x)+g(x)$. Покажем, что последнее утверждение справедливо. Действительно,

$$(F(x)+G(x))'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x).$$

4. $\int\left(Af(x)\right)dx=A\int f(x)dx$, где A — некоторая постоянная.

Перепишем свойство 4 в виде $\int\left(Af(x)\right)dx=AF(x)+C$ и покажем, что $AF(x)$ является первообразной функцией для функции $Af(x)$. Действительно,

$$(AF(x))'=AF'(x)=Af(x).$$

5. $\int f(kx)dx=\frac{F(kx)}{k}+C$, где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$.

Пусть $t=kx$. Тогда

$$\left(\frac{F(kx)}{k}\right)'_x=\frac{F'(t)(kx)'}{k}=F'(t)=f(t)=f(kx).$$

Следовательно, $\frac{F(kx)}{k}$ является первообразной подынтегральной функции $f(kx)$.

21.Таблица интегралов.

Поскольку неопределенный интеграл — это совокупность первообразных $F(x)+C$ для подынтегральной функции, то для нахождения неопределенного интеграла $\int f(x)dx$, требуется отыскать функцию $F(x)$, удовлетворяющую соотношению $F'(x)=f(x)$. Непосредственной проверкой этого соотношения можно убедиться в справедливости следующих формул.

1. $\int 0\cdot dx=C$.

2. $\int dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$).

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ ($x \neq 0$).

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right)$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $(x \neq \pi n, n \in Z)$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, $(-1 < x < 1)$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$, ($|x| > 1$, если в подкоренном выражении выбран знак –).

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $(a > 0,\ -a < x < a)$

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ ($a > 0$).

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, ($a > 0$, $|x| > a$, если выбран знак –).

17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, ($a > 0$, $|x| \neq a$).

18. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$.

19. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

20. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

22.Методы интегрирования:замена переменной.

Замена переменной в неопределенном интеграле

Теорема. Пусть функция $t=\varphi(x)$ определена и непрерывна на множестве $\{x\}$ и пусть $\{t\}$ — множество всех значений этой функции. Пусть далее для функции $g(t)$ существует на множестве $\{t\}$ первообразная функция $G(t)$, то есть

$$\int g(t)dt = G(t) + C.$$

Тогда всюду на множестве $\{x\}$ для функции $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ существует первообразная функция, равная $G(\varphi(x))$, то есть

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = G'(t)\varphi'(x) = g(t)\varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x),$$

то функция $G(\varphi(x))$ является первообразной для функции $g(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Замена переменной является одним из основных методов интегрирования. Предположим, что нам удалось выбрать в качестве новой переменной такую дифференцируемую функцию $t=\varphi(x)$, что подынтегральная функция $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x)$, а интеграл $\int g(t)dt$ легко вычисляется, тогда на основании теоремы о замене переменной в неопределенном интеграле имеем

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\varphi(x)) + C. \quad (1)$$

Добавим теперь к таблице основных интегралов несколько часто встречающихся интегралов, которые мы найдем с помощью замены переменной.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $(a>0,\ -a<x<a)$.

Сделаем замену переменной $t=x/a$, тогда $x=at$, $dx=adt$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-t^2}$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{adt}{a\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

18. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$ ($a>0$).

В этом интеграле также сделаем замену переменной $t=x/a$. В результате получим

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{adt}{a^2(1+t^2)} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$, ($a>0$, $|x|>a$, если выбран знак –).

Этот интеграл с помощью замены переменной $t=x/a$ можно свести к интегралу 12.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{adt}{a\sqrt{t^2 \pm 1}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm 1}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| - \ln a + C.$$

Заметим, что поскольку a — некоторая положительная постоянная, то $C-\ln a$ — это произвольная постоянная, поэтому в формуле (19) $C-\ln a$ заменили на C.

20. $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$, ($a>0$, $|x|\neq a$).

Преобразуем подынтегральную функцию к виду

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)$$

и рассмотрим интегралы $\int\frac{dx}{a+x}$ и $\int\frac{dx}{a-x}$. В первом интеграле сделаем замену переменной $t=a+x$, а во втором $u=a-x$. Тогда $dt=dx$, $du=-dx$. В результате замены получим

$$\int\frac{dx}{a+x}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|a+x|+C,\quad \int\frac{dx}{a-x}=-\int\frac{du}{u}=-\ln|u|+C=-\ln|a-x|+C.$$

Далее воспользуемся свойствами 3 и 4 неопределенного интеграла

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{a+x}+\int\frac{dx}{a-x}\right)=\frac{1}{2a}\left(\ln|a+x|-\ln|a-x|\right)+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$$

21. $\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$.

Преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

и сделаем замену переменной $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dt=\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$ и

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

22. $\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

Заметим, что $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, и сделаем замену переменной $t=x+\frac{\pi}{2}$. В результате получим

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\int\frac{dt}{\sin t}=\ln|\operatorname{tg}\frac{t}{2}|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

23. $\int\operatorname{tg}x dx=-\ln|\cos x|+C$.

Этот интеграл вычисляется с помощью замены переменной $t=\cos x$. При этом $dt=-\sin x dx$ и

$$\int\operatorname{tg}x dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

При интегрировании путем замены переменной преобразования (1) нередко записывают в сокращенном виде

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(\varphi(x)d\varphi = G(\varphi(x)) + C \quad (2)$$

В этом случае, говорят, что функция $\varphi(x)$ подведена под знак дифференциала. При такой форме записи вычисление интеграла 23 приобретает вид

$$\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

Приведем еще несколько примеров.

Пример 1. $\int \frac{e^{\mathrm{arctg}\,x}}{1+x^2} dx = \int e^{\mathrm{arctg}\,x} d(\mathrm{arctg}x) = e^{\mathrm{arctg}\,x} + C$. В этом интеграле фактически была сделана замена $t = \mathrm{arctg}\,x$, но часть преобразований

$$\int e^{\mathrm{arctg}\,x} d(\mathrm{arctg}x) = \int e^t dt = e^t + C = e^{\mathrm{arctg}\,x} + C$$

опущена.

Пример 2. $\int 2x(x^2+5)^5 dx = \int (x^2+5)^5 d(x^2+5) = \frac{1}{6}(x^2+5)^6 + C$**.** В данной записи вычисления интеграла мы опять опустили часть преобразований, подведя под знак дифференциала функцию $t = x^2 + 5$.

Пример 3. $\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x\, d(\sin x) = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$**.** Здесь по знак дифференциала подведена функция $t = \sin x$.

23.Интегрирование по частям.

Формула интегрирования по частям

Пусть каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируема на множестве $\{x\}$ и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$. Тогда на множестве $\{x\}$ существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (1)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой производной произведения двух функций

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Умножим это равенство на dx и возьмем интеграл от правой и левой части

$$\int (u(x)v(x))'dx = \int u(x)v'(x)dx + \int v(x)u'(x)dx$$

Так как $\int (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x) + C$, а интеграл $\int v(x)u'(x)dx$ существует , то существует и интеграл $\int u(x)v'(x)dx$, причем

$$\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int v(x)u'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

Учитывая, что $v'(x)dx = dv$, а $u'(x)dx = du$, формулу (1) можно записать в виде

$$\int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du \quad (2)$$

Пример 1. Найти интеграл $\int xe^x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям (4), полагая $u = x$, $du = dx$, $v = e^x$, $dv = e^x dx = de^x$. В результате получим

$$\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int x^2 \cos x dx$.

Полагая в формуле интегрирования по частям (2) $u = x^2$, $du = 2x$, $dv = \cos x dx = d \sin x$, получим

$$\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx.$$

Для вычисления интеграла $\int x \sin x dx$ еще раз применим формулу (2) ($u = x$, $du = dx$, $dv = \sin x dx = d(-\cos x)$, $v = -\cos x$). В результате имеем

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2\left(-x \cos x + \int \cos x dx\right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int e^x \cos x dx$.

Пусть $u = e^x$, $dv = \cos x dx = d \sin x$. Тогда по формуле (2)

$$I = \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$

При вычислении интеграла $\int e^x \sin x dx$ снова используем формулу интегрирования по частям ($u = e^x$, $dv = \sin x dx = d(-\cos x)$)

$$I = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - I.$$

В результате мы получили линейное алгебраическое уравнение относительно I

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I.$$

Решая его, находим

$$I = (e^x \sin x + e^x \cos x)/2 + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \ln x dx$.

Пусть $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда по формуле интегрирования по частям имеем

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

С помощью интегрирования по частям вычисляются интегралы следующих видов:

1) $\int (ax+b)^n e^x dx$, $\int (ax+b)^n \cos x dx$, $\int (ax+b)^n \sin x dx$.

При вычислении этих интегралов следует положить $u = (ax+b)^n$. Поскольку $du = a(ax+b)^{n-1} dx$, то в результате интегрирования по частям получатся интегралы вида

$$\int (ax+b)^{n-1} e^x dx, \int (ax+b)^{n-1} \cos x dx, \int (ax+b)^{n-1} \sin x dx.$$

Применяя формулу интегрирования по частям n раз придем к табличным интегралам

$$\int e^x dx, \int \cos x dx, \int \sin x dx.$$

2) $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$.

Применяя дважды формулу интегрирования по частям $(u=e^{ax})$, приходим к уравнению первого порядка относительно рассматриваемого интеграла. Решив это уравнение найдем искомый интеграл.

3) Подынтегральная функция содержит множитель: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$.

В этом случае в формуле интегрирования по частям надо положить функцию $u(x)$, равной одной из указанных функций.

24.Определенный интеграл, его геометрический смысл.

Определение. Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\delta_\tau \to 0$. Указанный предел I интегральных сумм называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Итак

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta_\tau \to 0} \sigma_\tau(f,\xi_1,\xi_2,...,\xi_n).$$

В записи определенного интеграла a называют нижним пределом интегрирования, b — верхним пределом интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией, отрезок $[a,b]$ — интервалом интегрирования.

Из определения определенного интеграла следует, что для неотрицательных функций определенный интеграл является пределом при $\delta_\tau \to 0$ последовательности площадей рассмотренных выше ступенчатых фигур. Поэтому он равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a,b]$ оси OX и прямыми $x=a$, $x=b$. Позже мы докажем это утверждение более строго.

Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. Криволинейной трапецией называется фигура Q, ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$, осью OX и графиком функции $f(x)$ (рис. 3)

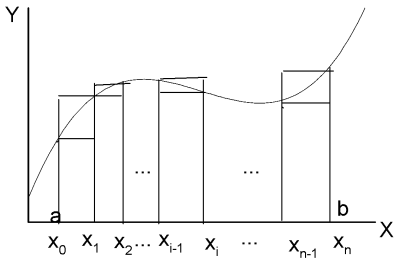


Рис. 3

Заметим, что нижняя сумма Дарбу s представляет собой площадь ступенчатой фигуры, вписанной в криволинейную трапецию, а верхняя сумма Дарбу S — площадь ступенчатой фигуры, описанной вокруг криволинейной трапеции. Очевидно, что

$$s \le S_Q \le S,$$

где S_Q — площадь криволинейной трапеции. Так как непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция интегрируема на этом отрезке, то

$$\lim_{\delta_\tau \to 0} S_\tau = \lim_{\delta_\tau \to 0} s_\tau = \int_a^b f(x)dx.$$

Следовательно,

$$S_Q = \int_a^b f(x)dx.$$

Итак, определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной неотрицательной функции равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью OX и графиком функции $f(x)$

25.Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда любая ее первообразная может быть представлена в виде

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C. \qquad (3)$$

Положим в формуле (3) сначала $x = a$, а затем $x = b$. В результате имеем два равенства

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C = C, \quad F(b) = \int_a^b f(t)dt + C.$$

Вычитая из второго равенства первое и заменяя t на x, получим основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (4)$$

Эту формулу называют также формулой Ньютона-Лейбница.

Разность $F(b) - F(a)$ обозначают символом $F(x)\Big|_a^b$, формулу (4) записывают в виде $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что для вычисления определенного интеграла нужно найти какую-либо первообразную подынтегральной функции и из значения этой первообразной для верхнего предела интегрирования вычесть значение для нижнего предела.

Пример. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|1+x|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

26.Свойства определенного интеграла.

1. Будем считать, что $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ($a < b$).

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ мы определили как предел интегральной суммы $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, когда мелкость разбиения стремится к нулю. При этом мы разбили отрезок $[a,b]$ точками x_i такими, что

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b,$$

и обозначили через Δx_i разность $x_i - x_{i-1} > 0$.

Если отрезок $[a,b]$ пробегается в направлении от b к a, то, следуя формальному определению интегральной суммы, мы должны положить

$$b = x_0 > x_1 > x_2 > ... > x_n = a.$$

Тогда все $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ станут отрицательными, и все слагаемые в интегральной сумме изменят знак на противоположный.

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ также интегрируемы на этом отрезке, причем

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \quad (1)$$

Докажем интегрируемость функций $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ и справедливость формулы (1). Действительно,

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i) \pm g(\xi_i)\big)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $Cf(x)$, также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

Действительно,

$$\int_a^b Cf(x))dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} Cf(\xi_i)\Delta x_i = = C \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = C\int_a^b f(x)dx.$$

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c,d]$, содержащемся в $[a,b]$.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема на отрезке $[a,b]$. Причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

.

Следующие свойства связаны с оценками интегралов.

7. Если интегрируемая на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ неотрицательна на этом отрезке, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Рассмотрим интегральную сумму $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. Так как $f(\xi_i) \geq 0$, и $\Delta x_i > 0$, то $\sigma \geq 0$ и $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sigma \geq 0$.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \geq m$ всюду на этом отрезке, то $\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$.

Заметим, что $f(x) - m \geq 0$, $\int_a^b dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = (b-a)$ и по свойству 7 $\int_a^b (f(x) - m)dx \geq 0$. Отсюда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b m dx = m(b-a)$.

9. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)$ всюду на этом отрезке, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Так как $f(x) - g(x) \geq 0$ всюду на отрезке $[a,b]$ и функция $f(x) - g(x)$ интегрируема на этом отрезке, то по свойству 7 имеем $\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$. Отсюда следует свойство 10.

10. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad . \tag{2}$$

Действительно, поскольку для функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

то согласно свойству 9 имеем

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)dx|,$$

откуда следует неравенство (2).

11. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда, если M и m — наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad (4)$$

Поскольку для любого x из отрезка $[a,b]$ справедливы неравенства $m \le f(x) \le M$, то

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx \quad (5)$$

Ранее мы установили, что $\int_a^b dx = b-a$. Подставляя значение интеграла $\int_a^b dx$ в (5) получим (4).

12. **Теорема о среднем.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда найдется такая точка ξ, принадлежащая отрезку $[a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (6)$$

Заметим, что непрерывная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке. Воспользуемся свойством 12. Разделим неравенства (4) на $(b-a)$. В результате получим

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Обозначая через μ число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, получим неравенства $m \le \mu \le M$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своих наибольшего и наименьшего значений и принимает все промежуточные значения от m до M. Следовательно, найдется такая точка ξ, принадлежащая отрезку $[a,b]$, что $f(\xi) = \mu$. Тогда имеем $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$. Отсюда следует формула (6).

27.Метод замены переменной в определенном интеграле.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;
2) отрезок $[a,b]$ является множеством значений некоторой функции $x = g(t)$, определенной на отрезке $[\alpha,\beta]$ и имеющей на этом отрезке непрерывную производную;
3) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

При этих условиях справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt \quad (5)$$

Эта формула называется формулой замены переменной под знаком определенного интеграла.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$. (6)

Рассмотрим сложную функцию $F(g(t))$ переменой t. Так как функции $F(x)$ и $g(t)$ дифференцируемы на соответствующих отрезках, то и функция $F(g(t))$ дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\frac{dF(g(t))}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\frac{dx}{dt} = f(x)g'(t) = f(g(t))g'(t)$$.

Отсюда следует, что функция $F(g(t))$ является первообразной для функции $f(g(t))g'(t)$. Тогда справедлива формула

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = F(b) - F(a)$$. (7)

Из равенств (6) и (7) вытекает формула (5).

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Сделаем замену переменной $x = \sin t$. Так как $t = \arcsin x$, $dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = 0$ при $t = 0$, $x = 1$, при $t = \frac{\pi}{2}$ то

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2} tdt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$$.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда для определенных интегралов справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big(u(x)v(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$.

Эту формулу можно также записать в виде

$$\int_a^b u(x)dv = \big(u(x)v(x)\big)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du$$.

Действительно, функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \big(u(x)v(x)\big)\Big|_a^b$$.

Отсюда следует формула интегрирования по частям.

Пример.

$$\int_0^\pi x\sin xdx = -\int_0^\pi xd\cos x = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos xdx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi$$.

28.Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда для определенных интегралов справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

.

Эту формулу можно также записать в виде

$$\int_a^b u(x)dv = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du$$

.

Действительно, функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b$$

.

Отсюда следует формула интегрирования по частям.

Пример.

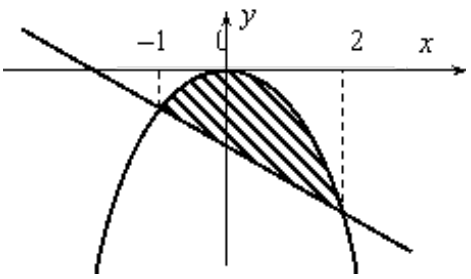
$$\int_0^\pi x\sin x dx = -\int_0^\pi x d\cos x = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi$$

.

29.Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции.

Геометрические приложения определённого интеграла.

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, $[f_1(x)\le f_2(x)]$



$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$$

и прямыми $x=a$ и $x=b$, находится по формуле

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями $y=-x^2$, $y=-x-2$.

Решение. Сделаем чертеж.

Найдем абсциссы точек пересечения данных линий:

$-x^2=-x-2$ или $x^2-x-2=0$,

$x_1=-1, x_2=2$.

Значит,

$$S = \int_{-1}^{2}\left[-x^2 - (-x-2)\right]dx =$$

$$= \int_{-1}^{2}\left[-x^2 + x + 2\right]dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]\Big|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 =$$

$=-3+1{,}5+4+2=4{,}5$.

Объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции вокруг оси Ox; находится по формуле:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

.

Длина кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a \le x \le b$,выражается следующим образом:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

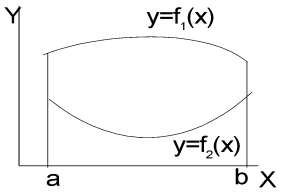
Площадь криволинейной трапеции.

Как уже говорилось ранее определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной неотрицательной функции равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, осью OX и графиком функции $f(x)$ (рис 1), то есть

$$S_{кр.тр.} = \int_a^b f(x)dx$$

Рис. 1

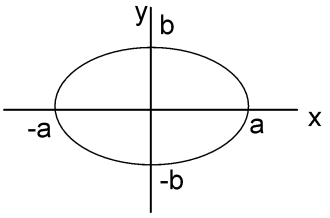
Если функция $f(x)$ непрерывна и неположительна на отрезке $[a,b]$, то площадь криволинейной трапеции равна $\left(-\int_a^b f(x)dx\right)$.



Если фигура Q ограничена сверху графиком непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f_1(x)$, снизу графиком непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f_2(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, то такую фигуру также называют криволинейной трапецией (рис. 2). Ее площадь равна $\int_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$, независимо от знаков функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$

Рис. 2

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 2).



Данная фигура симметрична относительно координатных осей. Рассмотрим часть Q_1, лежащую в первом квадранте. Q_1 ограничена графиком функции $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, отрезком $[0,a]$ оси OX и осью ординат. По формуле (9) имеем $S_{Q_1} = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, а площадь всей фигуры будет равны $4S_{Q_1}$. Сделаем в интеграле замену переменной $x=a\sin t$. Тогда

$$S = 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 tdt = 2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = 2ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

30.Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \le x < \infty$, и для любого $R \ge a$ существует определенный интеграл $F(R) = \int_a^R f(x)dx$.

Несобственным интегралом первого рода называется предельное значение функции $F(R)$ при $R \to \infty$.

Для несобственного интеграла используют обозначение $\int_a^{\infty} f(x)dx$. Из определения несобственного интеграла следует, что

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} F(R) = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx \quad . \tag{1}$$

Интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называют также интегралом с бесконечным верхним пределом.

Если существует конечный предел $\lim_{R\to\infty} F(R)$, то несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если нет — то расходящимся.

Аналогично определяется интеграл с бесконечным нижним пределом $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$. Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $-\infty < x < a$, и для любого $R \le a$ существует определенный интеграл $\int_R^a f(x)dx$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^a f(x)dx \quad . \tag{2}$$

Определим теперь несобственный интеграл вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Пусть функция $f(x)$ определена на всей вещественной оси и интегрируема на любом отрезке $[R', R'']$. Разобьем интеграл $\int_{R'}^{R''} f(x)dx$ на сумму двух интегралов $\int_{R'}^{a} f(x)dx$ и $\int_a^{R''} f(x)dx$, где $a \in (R', R'')$, и перейдем к пределу при $R' \to -\infty$ и $R'' \to \infty$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R'\to-\infty} \int_{R'}^{a} f(x)dx + \lim_{R''\to\infty} \int_a^{R''} f(x)dx \quad .$$

Отметим некоторые свойства несобственных интегралов.

1)Если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} Cf(x)dx$, где C — постоянная, отличная от нуля. Причем справедливо соотношение

$$\int_a^{\infty} Cf(x)dx = C\int_a^{\infty} f(x)dx \quad .$$

Если интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int_a^{\infty} Cf(x)dx$,

Действительно,

$$\int_a^{\infty} Cf(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R Cf(x)dx = C \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx = C\int_a^{\infty} f(x)dx \quad .$$

2) Если сходится несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$, то для любого $b > a$ интеграл $\int_b^{\infty} f(x)dx$ также сходится и имеет место равенство

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx \quad . \tag{4}$$

Действительно, так как

$$\int_a^{R} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{R} f(x)dx \quad ,$$

то

$$\int_b^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_b^{R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^{R} f(x)dx - \int_a^{b} f(x)dx \quad ,$$

$$\int_b^{\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx - \int_a^{b} f(x)dx \quad .$$

Отсюда следует справедливость формулы (4).

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, ($a > 0$).

$$\int_a^{R} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^R = \frac{R^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \alpha \neq 1; \\ \left.\ln x\right|_a^R = \ln R - \ln a, \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Если $\alpha > 1$, то

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{R\to\infty} \int_a^{R} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)R^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} \quad .$$

Заметим, что $\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{\alpha-1}} = 0$, так как $\alpha - 1 > 0$. Следовательно, при $\alpha > 1$ рассматриваемый несобственный интеграл сходится и равен $\frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$.

Если $\alpha < 1$, то $\lim_{R\to\infty} \int_a^{R} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{R^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \infty$. Следовательно, несобственный интеграл $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ расходится.

Если $\alpha = 1$, то $\lim_{R\to\infty} \int_a^{R} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{R\to\infty} (\ln R - \ln a) = \infty$, и несобственный интеграл $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ также расходится.

Итак, несобственный интеграл $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{R'\to-\infty} \int_{R'}^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{R''\to\infty} \int_0^{R''} \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{R'\to-\infty} \left.\operatorname{arctg} x\right|_{R'}^{0} + \lim_{R''\to-\infty} \left.\operatorname{arctg} x\right|_0^{R''} =$$

$$= -\lim_{R'\to-\infty} \operatorname{arctg} R' + \lim_{R''\to\infty} \operatorname{arctg} R'' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \quad .$$

Пример 3. Установить расходимость несобственного интеграла $\int_0^{\infty} \sin x dx$.

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} \sin x dx = \lim_{R\to\infty} (-\cos x)\Big|_0^R = -\lim_{R\to\infty} \cos R + 1.$$

Так как предельного значения $\cos R$ при $R \to \infty$ не существует, то несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \sin x dx$ расходится.