Программа коллоквиума по курсу математического анализа
I курс, осенний семестр 2017 года
лектор С.В.Шапошников

(1) Множества. Парадокс Рассела. Множество натуральных чисел. Метод математической индукции. Неравенство Бернулли. Бином Ньютона.
(2) Декартово произведение множеств. Функция и ее график. Ассоциативность композиции. Множество с операцией. Индуктивное определение сложения на множестве натуральных чисел. Множество целых чисел. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности. Множество рациональных чисел.
(3) Отношение частичного порядка. Отношение порядка на множестве натуральных чисел. Метод полной математической индукции. Равносильность аксиомы индукции и существования в каждом непустом подмножестве наименьшего элемента.
(4) Операции с множествами и формулы Моргана.
(5) Инъекции, сюръекции, биекции. Обратная функция. Группа биекций. Теорема Кантора–Бернштейна. Теорема Кантора о множестве всех подмножеств.
(6) Конечные множества. Счетные множества и их свойства. Пример Кантора несчетного множества.
(7) Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. Бесконечные десятичные дроби. Существование $\sqrt{2}$.
(8) Принцип полноты Вейерштрасса. Аксиома Архимеда. Принцип Кантора вложенных отрезков. Несчетность отрезка. Континуальные множества.
(9) Предел последовательности: единственность, ограниченность, отделимость.
(10) Переход к пределу в неравенствах. Теорема о сходимости зажатой последовательности.
(11) Арифметика пределов.
(12) Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e.
(13) Теорема Больцано о сходящейся подпоследовательности. Частичные пределы. Верхний и нижний предел.
(14) Фундаментальные последовательности и Критерий Коши.
(15) Ряды. Необходимое условие сходимости. Признаки сходимости неотрицательных рядов. Ряд Лейбница. Абсолютная и условная сходимости.
(16) Открытые и замкнутые множества. Структура открытых множеств.
(17) Граничные и предельные точки. Эквивалентные определения замкнутого множества. Замкнутость множества частичных пределов. Теорема Бэра.
(18) Компакты. Лемма Бореля–Гейне–Лебега. Множество Кантора и его свойства.

Задачи

(1) Докажите, что существует возрастающая биекция множества чисел вида $\frac{m}{2^n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, на множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$.
(2) Существует ли сюръекция $f\colon [0,1] \to [0,1]$ такая, что $f(x) \in \mathbb{Q}$ для всякого иррационального числа $x \in [0,1]$.
(3) Для функции $f\colon [a,b] \to [a,b]$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| \le q|x-y|$ с $0 < q < 1$. Докажите, что для всякого $x_1 \in [a,b]$ последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится к такому x_0, что $x_0 = f(x_0)$. Точка x_0 является неподвижной точкой f. Докажите, что неподвижная точка единственна.
(4) Докажите, что множество точек из отрезка $[0,1]$, которые можно записать десятичной дробью (возможно бесконечной и возможно с идущими подряд девятками) без цифры 7, является замкнутым и континуальным.
(5) Докажите, что множество точек из отрезка $[0,1]$, в десятичной записи которых не встречается комбинации цифр вида 2017, является нигде не плотным множеством (т.е. во всяком интервале есть интервал, в котором нет точек этого множества). Является ли это множество замкнутым или открытым?
(6) Докажите, что всякое замкнутое множество на числовой прямой является множеством частичных пределов некоторой последовательности.
(7) Докажите, что для замкнутых множеств гипотеза континуума решается положительно: если замкнутое множество не является конечным или счетным, то оно является континуальным.