Программа экзамена по математическому анализу
I курс, осенний семестр 2017 года
лектор С.В.Шапошников

(1) Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. Принцип полноты Вейерштрасса. Аксиома Архимеда. Принцип Кантора вложенных отрезков.
(2) Счетные множества и их свойства. Счетность множества рациональных чисел. Пример Кантора несчетного множества. Несчетность отрезка. Континуальные множества.
(3) Предел последовательности: единственность, ограниченность, арифметика, переход к пределу в неравенствах, теорема о сходимости зажатой последовательности.
(4) Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности. Число e.
(5) Теорема Больцано о сходящейся подпоследовательности. Частичные пределы. Верхний предел и нижний предел последовательности.
(6) Фундаментальные последовательности и критерий Коши.
(7) Ряды. Сходимость рядов с неотрицательными членами. Признак Коши и сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. Абсолютная и условная сходимость. Сходимость ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
(8) Открытые и замкнутые множества на числовой прямой и их свойства. Структура открытых множеств.
(9) Граничные и предельные точки. Эквивалентные определения замкнутого множества. Замкнутость множества частичных пределов.
(10) Компакты и их свойства. Лемма Гейне–Лебега–Бореля. Критерий компактности множества на числовой прямой.
(11) Определение Гейне предела функции и его свойства: единственность, арифметика, переход к пределу в неравенствах, теорема о сходимости зажатой функции, предел композиции.
(12) Определение Коши предела функции. Эквивалентность определения Гейне и определения Коши. Ограниченность и отделимость функции, имеющей конечный предел в данной точке.
(13) Замечательные пределы $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.
(14) Односторонние пределы. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной функции. Критерий Коши существования предела функции.
(15) Непрерывные функции: эквивалентные определения и локальные свойства. Классификация точек разрыва. Множество точек разрыва монотонной функции.
(16) Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на компакте функции и о достижении точной верхней и точной нижней граней множества значений.
(17) Теорема Коши о промежуточном значении и ее следствия. Теорема об обратной функции.
(18) Построение показательной функции и логарифмической функции.
(19) Теорема Кантора о равномерной непрерывности.
(20) Производная и дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Правила дифференцирования. Теорема о производной сложной функции. Инвариантность первого дифференциала.
(21) Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя.
(22) Производные высокого порядка. Правило Лейбница. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложения в нуле функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$.
(23) Формула Тейлора с остаточным членом в общей форме. Остаточные члены в форме Лагранжа и в форме Коши. Достаточное условие сходимости ряда Тейлора.
(24) Необходимое условие локального (внутреннего) экстремума. Достаточные условия локального максимума и локального минимума.
(25) Выпуклая функция. Непрерывность выпуклой функции. Дифференциальные условия выпуклости. Неравенство Йенсена.