Курс «Основы кибернетики» для бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 «Прикладная математика и информатика» профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений»

1. Общая информация (учебная нагрузка, формы контроля и др.)

Курс является обязательным для всех бакалавров (интегрированных магистров) направления 01400 — «Прикладная математика и информатика». При этом объём и, в некоторой степени, программа курса варьируются в зависимости от профиля.

Для бакалавров 3 курса профиля «Математические методы обработки информации и принятия решений» (311–319 группы) курс «Основы кибернетики» читается в 5 семестре в объёме 3 часов лекций и 1 часа семинарских занятий в неделю. Курс завершается экзаменом, на который выносятся как теоретические вопросы, изложенные на лекциях, так и задачи, рассмотренные на семинарских занятиях.

В разделах 2–6, 9 данного описания приводится подробная информация о содержании курса, программе и планах его изучения в 2026–2027 уч. году, о методических материалах и проведении контрольных мероприятий[1], а в разделах 7 и 8 — об особенностях организации учебного процесса.

По результатам контрольных мероприятий с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах, а также самостоятельной работы (см. раздел 7) выставляется предварительная оценка, которая играет существенную роль при формировании окончательной оценки на экзамене (см. раздел 8).

Чтение курса обеспечивается кафедрой математической кибернетики, лектор 2026–2027 уч. года — профессор Ложкин С. А. (lozhkin@cs.msu.ru).

2. Аннотация

Курс «Основы кибернетики» (ранее «Элементы кибернетики»), создателем и основным лектором которого был чл.-корр. РАН С. В. Яблонский, читается на факультете ВМК с первых лет его существования. Он является продолжением курса «Дискретная математика» и посвящён изложению основных моделей, методов и результатов математической кибернетики, связанных с теорией дискретных управляющих систем (УС), с задачей схемной или структурной реализации дискретных функций и алгоритмов.

В нём рассматриваются различные классы УС (классы схем), представляющие собой дискретные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Для базовых классов УС (схем из функциональных элементов, формул, контактных схем, автоматных схем), а также некоторых других типов УС, ставятся и изучаются основные задачи теории УС: задача минимизации дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), задача эквивалентных преобразований и структурного моделирования УС, задача синтеза УС, задача повышения надёжности и контроля УС из ненадёжных элементов и др. В программу курса входят классические результаты К. Шеннона, С. В. Яблонского, Ю. И. Журавлева и О. Б. Лупанова, а также некоторые результаты последних лет. Показывается возможность практического применения этих результатов на примере задачи проектирования СБИС, которые составляют основу программно-аппаратной реализации алгоритмов.

Продолжением курсов «Дискретная математика» и «Основы кибернетики» является читаемый для бакалавров данного профиля в 7 семестре курс «Дополнительные главы дискретной математики и кибернетики».

[1] График и форма проведения контрольных мероприятий могут уточняться по ходу семестра.

3. Программа

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи

Единичный куб и функции алгебры логики (ФАЛ), представление ФАЛ с помощью ДНФ. Сокращённая ДНФ и тупиковые ДНФ, их «геометрический» смысл. Способы построения однозначно получаемых ДНФ (сокращённой, пересечения тупиковых, Квайна, суммы тупиковых). Особенности ДНФ для ФАЛ из некоторых классов. Функция покрытия и алгоритм построения всех тупиковых ДНФ, оценка длины градиентного покрытия. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ, оценки максимальных и типичных значений некоторых параметров ДНФ.

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем

Различные классы УС (классы схем) как структурные математические модели различных типов электронных схем, систем обработки информации и управления, алгоритмов и программ. Основные классы УС — формулы и схемы из функциональных элементов (СФЭ), контактные схемы (КС), — их структура, меры сложности, функционирование, эквивалентность, полнота. Оценка числа схем различных типов.

Понятие подсхемы и принцип эквивалентной замены. Тождества и связанные с ними эквивалентные преобразования УС. Построение полных систем тождеств для формул, СФЭ и КС. Отсутствие конечной полной системы тождеств для КС.

III. Синтез и сложность управляющих систем

Задача синтеза УС, сложность ФАЛ и функция Шеннона. Простейшие методы синтеза схем, реализация некоторых ФАЛ и оценка их сложности. Операция суперпозиции схем и её корректность, лемма Шеннона. Метод каскадов для КС и СФЭ, метод Шеннона. Мощностные методы получения нижних оценок для функций Шеннона. Асимптотически наилучшие методы синтеза формул, СФЭ и КС.

IV. Надёжность и контроль управляющих систем

Самокорректирующиеся КС и простейшие методы их синтеза. Асимптотически наилучшие методы синтеза КС, корректирующих один обрыв или одно замыкание.

Задача контроля УС, тесты для таблиц. Алгоритм построения всех тупиковых тестов, оценки максимального и типичного значений длины диагностического теста.

V. Некоторые классы схем, связанные с программно-аппаратной реализацией алгоритмов, и задача их синтеза

Некоторые модификации основных классов схем, связанные с программной реализацией ФАЛ. Автоматные функции, их реализация схемами из функциональных элементов и элементов задержки, схемы с «мгновенными» обратными связями. Схемы на КМОП-транзисторах, задача логического и «физического» синтеза СБИС, основные этапы её решения. Некоторые вопросы «аппаратной» информационной безопасности.

4. Предварительный список вопросов к экзамену по курсу «Основы кибернетики» (осенний семестр 2026–2027 уч. года; 311–392 группы), ориентировочный график их рассмотрения на лекциях

I. Минимизация дизъюнктивных нормальных форм и связанные с ней задачи (2.IX–23.IX)

1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) и его «геометрическая» интерпретация. Совершенная ДНФ и критерий единственности ДНФ. См. [1: гл. 1, §§2, 5]. (2.IX)
2. Сокращённая ДНФ и способы её построения. См. [1: гл. 1, §3]. (7.IX)
3. Тупиковая ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых. ДНФ Квайна, критерий вхождения простых импликант в тупиковые ДНФ и его локальность . См. [1: гл. 1, §4]. (9.IX, 14.XI)
4. Особенности ДНФ линейных и монотонных ФАЛ. Функция покрытия, таблица Квайна и построение всех тупиковых ДНФ . См. [1: гл. 1, §§5, 6]. (14.IX, 16.IX)
5. Градиентный алгоритм и оценка длины градиентного покрытия, лемма о «протыкающих» наборах. Использование градиентного алгоритма для построения ДНФ. См. [1: гл. 1, §6]. (16.IX)
6. Алгоритмические трудности минимизации ДНФ и оценки максимальных значений некоторых связанных с ней параметров [1: гл. 1, §§1, 3, 7]. Теорема Ю. И. Журавлёва о ДНФ сумма минимальных [1: гл. 1, §5]. (21.IX, 23.IX)

II. Основные классы дискретных управляющих систем, структурные представления схем и оценка их числа. Эквивалентные преобразования управляющих систем (23.IX–11.XI)

7. Задание формул с помощью деревьев, эквивалентность формул и функционалы их сложности и соотношения между ними. [1: гл. 1, §1; гл. 3, §1]. Оптимизация подобных формул по глубине [1: гл. 2, §2]. (23.IX, 28.IX)
8. Эквивалентные преобразования формул с помощью тождеств. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований формул базиса $Б_0$. См. [1: гл. 3, §2]. (30.IX)
9. Контактные схемы (КС) и π-схемы, моделирование формул и π-схем. Особенности функционирования многополюсных КС. См. [1: гл. 2, §§5, 6]. (5.X)
10. Эквивалентные преобразования КС. Основные тождества, вывод вспомогательных и обобщённых тождеств. См. [1: гл. 3, §4]. (7.X)
11. Полнота системы основных тождеств. Отсутствие конечной полной системы тождеств в классе всех КС. См. [1: гл. 3, §5]. (19.X, 21.X)
12. Схемы из функциональных элементов (СФЭ) и операции их приведения. Оценка числа формул и СФЭ в базисе $Б_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, оценки числа КС и числа π-схем. См. [1: гл. 2, §§2,3,5]. (26.X)
13. Эквивалентные преобразования СФЭ и моделирование с их помощью формульных преобразований. Полнота системы основных тождеств для эквивалентных преобразований СФЭ базиса $Б_0$. Теорема перехода. См. [1: гл. 3, §§1, 3]. (11.XI)

III. Синтез и сложность управляющих систем (28.X–9.XII)

14. Задача синтеза и простейшие нижние оценки сложности ФАЛ. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций. См. [1: гл. 4, §1,2]. (23.X)
15. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные КС и лемма Шеннона. См. [1: гл. 2, §§6, 7]. (2.XI)
16. Каскадные КС и СФЭ. Метод каскадов и примеры его применения, метод Шеннона. См. [1: гл. 4, §3]. (9.XI)
17. Нижние мощностные оценки функций Шеннона. См. [1: гл. 4, §4]. (23.XI)

18. Дизъюнктивно-универсальные множества ФАЛ. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза СФЭ в базисе $Б_0$. См. [1: гл. 4, §5]. (23.XI)

19. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование ФАЛ переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $Б_0$. См. [1: гл. 4, §6]. (30.XI)

20. Асимптотически наилучший метод синтеза КС. См. [1: гл. 4, §7]. (2.XII)

21. Синтез схем для ФАЛ из специальных классов и некоторых индивидуальных ФАЛ, встречающихся в приложениях, оценки их сложности. См. [1: гл. 4, §5,7]. (7.XII, 9.XII)

IV. Надёжность и контроль управляющих систем (25.XI, 2.XII, 7.II)

22. Задача контроля схем и тесты для таблиц. Построение всех тупиковых тестов, оценки длины диагностического теста. См. [1: гл. 1, §8]. (25.XI)

23. Самокорректирующиеся КС и методы их построения. Асимптотически наилучший метод синтеза КС, корректирующих 1 обрыв (1 замыкание). См. [4: §7], [2: ч. III, р. 2, 1]. (2.XII, 7.XII)

V. Некоторые классы схем, связанные с программно-аппаратной реализацией алгоритмов, и задача их синтеза (9.XII, 14.XII)

24. Некоторые модификации основных классов схем (BDD, вычисляющие программы, схемы на КМОП-транзисторах и др.), связанные с программно-аппаратной реализацией ФАЛ. См. [1: гл. 2, §§4, 6, 7]. (9.XII)

25. Реализация автоматных функций схемами из функциональных элементов и элементов задержки, схемы с «мгновенными» обратными связями. См. [6: §8], [2: ч. I, р. I, гл. 3, §§2–3]. (14.XII)

27. Задачи логического и топологического синтеза СБИС, основные этапы и методы их решения. Некоторые вопросы «аппаратной» информационной безопасности. См. [1: гл.2, §7], [8]. (14.XII)

5. Типовые задачи к экзамену

I. Задачи на ДНФ

1. По заданной ФАЛ построить её сокращённую ДНФ, ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых, все тупиковые ДНФ.

II. Задачи на структурное моделирование и эквивалентные преобразования

2. По заданной формуле построить подобную ей формулу минимальной глубины.
3. По заданной формуле с поднятыми отрицаниями построить моделирующую её π-схему и обратно.
4. По заданным эквивалентным формулам или КС построить эквивалентное преобразование, переводящее их друг в друга с помощью основных тождеств.

III. Задачи на синтез схем

5. По данной каскадной КС построить инверсную каскадную КС.
6. По заданной ФАЛ с помощью простейших методов, метода каскадов или метода Шеннона построить реализующую её СФЭ или КС.
7. Оценить сверху и снизу сложность конкретной ФАЛ или системы ФАЛ в заданном классе схем.

IV. Задачи на самокоррекцию и тесты

8. По заданной КС построить эквивалентную ей самокорректирующуюся КС.
9. По заданной таблице или КС и списку её неисправностей построить все тупиковые проверяющие (диагностические) тесты.

6. Литература

Основная:

1. Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики. — М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс), http://mk.cs.msu.ru)
2. Яблонский С. В. Элементы математической кибернетики. — М.: Высшая школа, 2007.
3. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986.
4. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнёва С. Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики». — М.: МГУ, 2011.
5. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Дополнительная:

6. Алексеев В. Б., Ложкин С. А. Элементы теории графов, схем и автоматов. — М.: МГУ, 2000.
7. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. — М.: Наука, 1974.
8. Ложкин С. А., Марченко А. М. Математические модели и методы синтеза СБИС. (http://mk.cs.msu.ru/images/8/87/Lozhkin-Marchenko-VSLI-models.pdf)
9. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: МГУ, 1984.
10. Нигматулин Р. Г. Сложность булевых функций. — М.: Наука, 1991.

7. Особенности организации и контроля аудиторной и самостоятельной работы студентов

Данный вариант курса «Основы кибернетики» явля9ется достаточно сложным и объёмным математическим курсом, усвоение которого требует от студентов полноценной и регулярной как аудиторной, так и самостоятельной работы, что невозможно без чёткой организации занятий, строгой дисциплины и систематического контроля. При этом необходимо, чтобы в рамках самостоятельной работы[2] студенты прорабатывали материал, пройденный на предшествующей лекции (семинаре), и желательно, чтобы они *знакомились с материалом предстоящей лекции (семинара)*.

Для контроля за освоением программы курса в течение семестра будет проведено несколько контрольных работ (тестов) на знание и понимание определений, формулировок утверждений и т. п., а также на умение решать задачи. Планируется осуществлять систематический (выборочный) контроль за работой студентов как на семинарах, так и на лекциях, а также за выполнением домашних заданий. Все контрольные мероприятия проводятся в рамках расписания, а форма и сроки их проведения будут уточняться по ходу семестра. Перед каждой контрольной (тестом) предполагается проведение консультации.

Одной из форм самостоятельной работы является решение предлагаемых на лекциях «трудных» задач[3], связанных в ряде случаев с написанием программ, которое позволяет студентам глубже усвоить материал курса и набрать дополнительные к результатам контрольных баллы, повысив, тем самым, свою предварительную оценку (см. раздел 8).

Информационные объявления, данные о посещаемости и текущей успеваемости студентов размещаются на платформе Google Classroom, ссылка на подключение к которой находится на главной странице курса.

8. О проведении экзамена[4] по курсу «Основы кибернетики»

Как уже говорилось, по результатам контрольных работ с учётом посещаемости студентов, их работы на лекциях и семинарах, а т9акже самостоятельной работы каждому из них выставляется предварительная оценка. Для студентов, имеющих предварительную оценку «5», экзамен проводится в форме общего собеседования по программе курса на определения, формулировки утверждений и идеи их доказательства, методы решения задач. Для студентов, имеющих предварительную оценку «2», экзамен представляет собой письменный тест-контрольную.

Все остальные студенты (с предварительной оценкой «3-», «3» и «4») получают билет с двумя вопросами и одной задачей и после 15–20 минутной подготовки отвечают на него сначала на уровне определений, формулировок утверждений и идей их доказательства, а также методов решения задач. Затем студент, по усмотрению экзаменатора, должен раскрыть те или иные детали доказательства утверждений из вопросов билета по конспектам или иным источникам, а также полностью или частично решит9ь задачу билета в течение выделенного специально для этого времени. Студенты, набравшие не менее 80% от суммы баллов по задачам тестов и контрольных соответствующего раздела, то есть получившие по ним оценку «5», от решения билетной задачи данного типа освобождаются. Последний этап экзамена представляет собой описанное выше общее собеседование по другим вопросам или задачам программы.

В соответствии с установленными нормами итоговая экзаменационная оценка, как правило, не может отличаться от предварительной оценки больше, чем на один балл. Студенту, который имеет предварительную оценку «3» или «4» и не претендует на более высокую итоговую оценку, предоставляется возможность сдавать экзамен по упрощённой процедуре (в форме собеседования по программе без предварительной подготовки) с целью подтверждения этой оценки.

---

[2] 1 час самостоятельной работы на 1 час аудиторных занятий.

[3] После объявления на лекции формулировки этих задач вывешиваются в интернете, а их решение, оформлен9ное в виде pdf файла, необходимо прислать по адресу lozhkin@cs.msu.ru (принимается первое, полное и правильное решение).

[4] Данный вариант не расчитан на проведение экзамена в дистанционном формате и не является окончательным.

9. Планы семинарских занятий на осенний семестр 2026-2027 уч. года, предварительный график проведения семинаров, контрольных работ и консультаций

Общий план содержит 8 семинарских занятий, 7 из которых пройдёт по основному расписанию, а занятие 8 — по совмещённому графику для групп 1 и 2 недель[5].

Семинар 1 (7.IX — для групп 2 недели, 9.IX — для групп 1 недели и т.д.)

Представление ФАЛ с помощью ДНФ, импликанты и простые импликанты ФАЛ. Сокращённая ДНФ и методы её построения. Теоретический материал [1: с. 27–35], [5: с. 47, 296–298].

В классе. Из [5]: гл. I — 2.3 (3); гл. IX — 2.1 (1,2), 2.5 (1,5), 2.6 (1,5), 2.3 (1,2), 2.2 (1,2), 2.9 (1,2).

На дом. Из [5]: гл. I — 2.3 (4); гл. IX — 2.1 (3), 2.5 (2,6), 2.6 (2,6), 2.2 (3,4), 2.3 (3,4), 2.9 (6).

Семинар 2 (21.IX, 28.IX)

Ядро и ДНФ Квайна, ДНФ сумма тупиковых. Построение всех тупиковых ДНФ.
Теоретический материал [1: с. 38–43, 51–55], [5: с. 301–302].

В классе. Из [5, гл. IX]: 3.1 (1,5), 3.3 (1,2 — построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ $\sum T$), 3.4 (3), 3.6 (1,4,7).

На дом. Из [5, гл. IX]: 3.1 (4,6), 3.3 (3,4 — построить ядро, ДНФ Квайна и ДНФ $\sum T$), 3.4 (4), 3.6 (3,6,8).

Контрольная работа 1 (14.X)

Контрольная работа по I разделу курса проводится вместо лекции 14.X. Консультация к ней пройдёт 12.X в рамках лекционного расписания.

Семинар 3 (5.X, 7.X)

Эквивалентные преобразования формул.
Теоретический материал [1: с. 146–148, 156–161], [4: с. 19].

В классе. Из [4]: 3.1 (1), 3.3 (1,4), 3.8 (1–3), 3.9 (1).

На дом. Из [4]: 3.1 (2), 3.3 (3,6), 3.8 (5–9), 3.9 (2).

Семинар 4 (19.X, 26.X)

Моделирование формул и π-схем. Эквивалентные преобразования КС.
Теоретический материал [1: с. 169–185].

В классе. Промоделировать π-схемой какую-нибудь формулу с поднятыми отрицаниями. Промоделировать формулой какую-нибудь π-схему. Из [4]: 4.1 (2,4,6–8), 4.3 (1).

На дом. Промоделировать π-схемой какую-нибудь формулу с поднятыми отрицаниями. Промоделировать формулой какую-нибудь π-схему. Из [4]: 4.1 (9–12), 4.3 (3).

Контрольная работа 2 (18.XI)

Контрольная работа по II разделу курса проводится вместо лекции 18.XI. Консультация к ней пройдёт 16.XI в рамках лекционного расписания.

Семинар 5 (2.XI, 9.XI)

Сложность ФАЛ и методы синтеза схем на основе ДНФ. Оптимизация подобных формул по глубине. Теоретический материал [1: с. 186–210].

В классе. Из [5: гл. X]: 1.1 (2,3,4, ФАЛ — как в классе СФЭ, так и в классе КС, а также ФАЛ $(x_1 \vee x_2)x_3 \vee (\overline{x}_1 \vee x_2)x_4$ — в классе КС); 2.4 (1); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем. Оптимизировать по глубине формулу $\mathcal{F} = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4\overline{x}_5 \vee x_4x_5x_6$.

[5] Группы чётной недели: 311, 313, 315, 391. Группы нечётной недели: 312, 314, 316, 317, 318, 392.

На дом. Из [5: гл. X]: 1.1 (5–7), 2.4 (2); доказать минимальность некоторых из построенных в предыдущих задачах схем. Оптимизировать по глубине формулу $\mathcal{F} = x_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4x_5 \vee x_2x_3x_4 \vee x_4x_5 \vee \overline{x}_5x_6$.

Семинар 6 (16.XI, 23.XI)

Каскадные КС и СФЭ, метод каскадов для КС и СФЭ. Метод Шеннона. Теоретический материал [1: с.186–210].

В классе. Из [5: гл. X]: 2.13 (1,7), 2.14 (1), 2.14 (5 — как КС, так и СФЭ) и т. п. Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

На дом. Из [5: гл. X]: 2.13 (2,6), 2.14 (2), 2.14 (6 — как КС, так и СФЭ). Разлагая ФАЛ от 3 или 4 БП по всем БП, кроме последней, построить для неё КС по методу Шеннона.

Семинар 7 (30.XI, 7.XII)

Тесты для таблиц, тесты для контактных схем.
Теоретический материал [1: с. 65–72, 51–55], [4: с. 32–34, 37–38].

В классе. Из [4]: 5.1 (1,2 — все тупиковые диагностические тесты), 5.1 (3 — все тупиковые проверяющие тесты), 6.2, 6.4, 6.11 (если хватит времени).

На дом. Из [4]: 5.1 (5 — все тупиковые диагностические тесты, 6 — все тупиковые проверяющие тесты), 6.3, 6.5, 6.14.

Семинар 8 (14.XII с совмещением)

Синтез схем для ФАЛ из специальных классов. Синтез самокорректирующихся КС.
Теоретический материал [1: с. 215–216, 222–224], [4: с. 49–50].

В классе. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ равных 1 при $x_1 = 1$ (КС), класса всех самодвойственных ФАЛ (СФЭ), класса всех ФАЛ симметричных по первым трем БП (КС). Из [4]: 7.9 (б), 7.19 (1), 7.13.

На дом. Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех ФАЛ, равных 0 при $x_1 = x_2 = 0$ (КС), класса, состоящего из всех тех ФАЛ, у которых любая подфункция от первых трёх БП линейна (СФЭ). Из [4]: 7.9 (в), 7.10 (2), 7.11 (а).

Контрольная работа 3 (21.XII)

Контрольная работа по III и IV разделам курса пройдёт вместо лекции 21.XII. Консультация к этой контрольной работе состоится 16.XII в рамках лекционного расписания.