# Общефакультетский курс «Основы кибернетики»

## Осенний семестр 2026–2027 уч. г.
## группы 311–392


## Лектор — профессор С. А. Ложкин
(lozhkin@cs.msu.ru)


**Информационная поддержка курса:**
http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(2-й_поток,_3_курс)

# III. Синтез и сложность управляющих систем

# 14. Задача синтеза и простейшие нижние оценки сложности ФАЛ. Методы синтеза схем на основе ДНФ и связанные с ними верхние оценки сложности функций

Функции, встречающиеся в приложениях:

1. линейная ФАЛ порядка $n$, то есть ФАЛ $\ell_n$ или ФАЛ $\overline{\ell}_n$;
2. мультиплексорная ФАЛ $\mu_n$ порядка $n$;
3. дешифратор $\overrightarrow{Q}_n$ (дизъюнктивный дешифратор $\overrightarrow{J}_n$) порядка $n$;
4. универсальная система $\overrightarrow{P}_2(n)$ порядка $n$, состоящая из всех различных ФАЛ множества $P_2(n)$, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений.

**Утверждение 14.1** Для любого натурального $n$ в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{С}}$ существует универсальная СФЭ порядка $n$, сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

**Следствие**

$$L_{\text{Б}}^{\text{С}}(\overrightarrow{P}_2(n)) \leqslant 2^{2^n} - n.$$

**Утверждение 14.2** Если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n-1, \qquad L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n.$$

Если при этом ФАЛ $f$ не является монотонной ФАЛ (каждая БП $x_i$, $i \in [1, k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ $f$), то

$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n$ (соответственно $L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n+k$).

## Следствие

$$L^{\mathrm{C}}(\ell_n) \geqslant n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\ell_n) \geqslant 2n,$$
$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \geqslant 2^n + n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\mu_n) \geqslant 2^n + 2n.$$

**Утверждение 14.3** Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant m \quad (\text{соответственно } L^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(F) \geqslant m).$$

## Следствие

$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n,$$

$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n,$$

$$L^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - n, \quad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - 2$$

**Замечание** В силу следствия универсальная СФЭ $U_n$, построенная в утв. 14.1, является минимальной по сложности СФЭ в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$.

**Утверждение 14.4** Для любой ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \neq 0$, существуют формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, и $\pi$-схема $\Sigma_f$, которые реализуют $f$ и для которых справедливы неравенства:

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2n \cdot |N_f| - 1, \qquad L(\Sigma_f) \leqslant n\,|N_f|\,,$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leqslant \lceil \log(n \cdot |N_f|) \rceil + 2.$$

**Следствие 1.** В силу указанных неравенств, с учетом того, что ФАЛ 0 можно реализовать $\pi$-схемой сложности 2, а также формулой из $\mathcal{U}^{\Phi}$, имеющей сложность 2, выполняются неравенства

$$L^{\mathrm{C}}(n) \leqslant L^{\Phi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n+1} - 1,$$
$$L^{\mathrm{K}}(n) \leqslant L^{\pi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n}.$$

**Следствие 2.**

$$D(n) \leqslant n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

**Утверждение 14.5** Для любой ФАЛ $f$, $f \in P_2(n)$ и $f \neq 0$, существуют $\pi$-схема $\Sigma_f$ и формула $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, которые реализуют $f$ и для которых справедливы неравенства:

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^n + |N_f| - 2,$$
$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

**Следствие**

$$L^{\pi}(n) \leqslant 2^{n+1} - 2,$$
$$L^{\Phi}(n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 4.$$

# 15. Разложение ФАЛ и операция суперпозиции схем. Корректность суперпозиции для некоторых типов схем, разделительные контактные схемы и лемма Шеннона

**Утверждение 15.1.** Пусть КС $\Sigma$ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а $F$, $F'$ и $F''$ — матрицы, реализуемые КС $\Sigma$, $\Sigma'$ и $\Sigma''$ соответственно. Тогда

$$F \geqslant F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'',$$

если КС $\Sigma''$ разделительна по входам или КС $\Sigma'$ разделительна по выходам.

**Следствие 1.** В случае разделительности КС $\Sigma''$ по входам в каждой вершине КС $\Sigma$, $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, которая соответствует выходу КС $\Sigma'$, реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС $\Sigma'$.

**Следствие 2.** Равенство $F = F' \cdot F''$ выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС $\Sigma''$ разделительна по входам или КС $\Sigma'$ разделительна по выходам.

**Замечание.** Отождествление входов (выходов) у разделительной по входам (выходам) КС дает разделительную по рассматриваемой группе полюсов КС.

# 16. Каскадные контактные схемы и схемы из функциональных элементов. Метод каскадов и примеры его применения, метод Шеннона

**Утверждение 16.1** Если $(1, m)$-ККС $\Sigma'$ реализует систему ФАЛ $F' = (f'_1, \ldots, f'_m)$, то существует $(1, m)$-ККС $\Sigma''$, которая реализует систему ФАЛ $\overline{F}' = \left(\overline{f}'_1, \ldots, \overline{f}'_m\right)$ и для которой $L(\Sigma'') \leqslant 2L(\Sigma')$.

**Утверждение 16.2** Для любого натурального $n$ и $\sigma \in B$ выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{K}}(\ell_n^\sigma) \leqslant 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, L^{\mathrm{C}}(\ell_n^\sigma) \leqslant 4n - 4 + \left\lfloor \frac{\sigma}{n} \right\rfloor;$$

$$L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \leqslant 2 \cdot 2^{2^n},\ L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) = 2^{2^n} - n;$$

$$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^{\Phi}(\mu_n) \leqslant 2^{n+2} - 3;$$

$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}),\ L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^{n+1} - 2;$$

$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^n + O(n \cdot 2^{n/2}),\ L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^{n+2} - 6.$$

**Следствие** $L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{Q}_n) \sim L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^n$.

**Утверждение 16.3** Для функций Шеннона $L^{\mathrm{K}}(n)$ и $L^{\mathrm{C}}(n)$ выполнены соотношения:

$$L^{\mathrm{K}}(n) \lesssim 4\frac{2^n}{n}, \qquad L^{\mathrm{C}}(n) \lesssim 8\frac{2^n}{n}.$$

# 17. Нижние мощностные оценки функций Шеннона

**Утверждение 17.1** Для некоторых последовательностей $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, где $i = 1, \ldots, 4$, и $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\varepsilon_i(n) \geqslant 0$ при $n \geqslant n_0$ и $\varepsilon_i(n)$ стремится к 0 при $n$ стремящемся к бесконечности для почти всех ФАЛ $f$, $f \in P_2(n)$, выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant \Big(1 - \varepsilon_1(n)\Big)\frac{2^n}{n}, \qquad L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant \Big(1 + \varepsilon_2(n)\Big)\frac{2^n}{n},$$

$$L^{\Phi}(f) \geqslant \Big(1 - \varepsilon_3(n)\Big)\frac{2^n}{\log n}, \quad D(f) \geqslant n - \log\log n - \varepsilon_4(n).$$

# Следствие

$$D(n) \geqslant \lceil n - \log\log n - o(1) \rceil,$$

$$L^{\mathrm{C}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$

$$L^{\Phi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n},$$

$$L^{\mathrm{K}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}.$$

# 18. Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

**Утверждение 18.1** Для любых натуральных $p$, $m$ и $s$, где $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$, существует стандартное ДУМ $G$ порядка $m$ и высоты $s$, которое является ДУМ ранга $p$ и для которого:

1) $\lambda = |G| \leqslant p2^s$;
2) система из $p$ характеристических ФАЛ $\psi_1, \ldots, \psi_p$ ДУМ $G$ обладает тем свойством, что для любой ФАЛ $g$, $g \in P_2(m)$, и соответствующих ФАЛ $g_1, \ldots, g_p$ из $G$ справедливы представления

$$g = g_1 \vee \cdots \vee g_p = \psi_1 g_1 \vee \cdots \vee \psi_p g_p.$$

**Утверждение 18.2** Для любой ФАЛ $f$, $f \in P_2(n)$, существует реализующая её СФЭ $\Sigma_f$, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, такая, что

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{5\log n + O(1)}{n}\right).$$

**Следствие.** Из этого утверждения с учетом следствия из утверждения 17.1 вытекает, что

$$L^{\mathrm{C}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

# 19. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

**Утверждение 19.1** Для любых натуральных $m$, $\lambda$ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует $m$-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба $B^q$ такое, что любая ФАЛ $g_i$ на любой компоненте $\delta_j$ совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$, либо с ее отрицанием.

**Замечание.** Если в условиях утверждения $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\lambda) = \nu^{-1}(j-1)$, то $g_i \equiv x_{i+m}^{\overline{\alpha_j}}$ на $\delta_j$.

**Утверждение 19.2** Для любой ФАЛ $f$, $f \in P_2(n)$, в $\mathcal{U}^\Phi$ существует реализующая ее формула $\mathcal{F}_f$, для которой

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{2\log\log n + O(1)}{\log n}\right),$$
$$D(\mathcal{F}_f) \leqslant n - \log\log n + O(1).$$

**Следствие.** Из этих оценок с учетом нижних оценок следствия из утверждения 17.1 вытекает, что

$$L^\Phi(n) \sim \frac{2^n}{\log n}, \quad D(n) \leqslant n - \log\log n + O(1).$$

# 20. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем

**Утверждение 20.1** Для любой ФАЛ $f$, $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС $\Sigma_f$ такая, что

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

**Следствие.** Из этой оценки с учетом нижней оценки следствия из утверждения 18.1 вытекает, что

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

**Замечание 1.** Построенную КС $\Sigma_f$ можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda + 1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа.

**Замечание 2.** В случае $s = 1$ и, следовательно, $p = 2^m$, $\overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{Q}_m(x_1, \ldots, x_m)$ и $G = \{0, 1\} - \overrightarrow{\psi}$-ДУМ, $(1, 2^n)$-ККС $\Sigma_n$, которая получается из $\Sigma_f$ при $m = \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$ в результате «разделения» контактов, входящих в «1» и «0», реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{Q}_n$ со сложностью

$$L(\Sigma_n) \leqslant 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

# 21. Синтез схем для функций из специальных классов и некоторых индивидуальных функций встречающихся в приложениях

**Утверждение 21.1** Для класса ФАЛ $\mathfrak{Q}$ такого, что

$$n = o\left(\frac{\log|\mathfrak{Q}(n)|}{\log\log|\mathfrak{Q}(n)|}\right)$$
$$\left(\log n = o\left(\log\log|\mathfrak{Q}(n)|\right)\right),$$

выполняются асимптотические неравенства

$$L^{\mathrm{C}}\left(\mathfrak{Q}\left(n\right)\right) \gtrsim \frac{\log|\mathfrak{Q}\left(n\right)|}{\log\log|\mathfrak{Q}(n)|}$$

(соответственно $L^{\mathrm{K}}\left(\mathfrak{Q}\left(n\right)\right) \gtrsim \frac{\log|\mathfrak{Q}\left(n\right)|}{\log\log|\mathfrak{Q}(n)|}$).

**Утверждение 21.2** Для $n = 1, 2, 3, \ldots$ выполняются неравенства

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right).$$

**Утверждение 21.3** Для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 2 \cdot 2^n + O\left(2^n/n\right),$$
$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \leqslant 2 \cdot 2^n + O\left(2^n/n\right),$$
$$D(\mu_n) \leqslant n + 6,$$

причем существует такая реализующая ФАЛ $\mu_n$ и бесповторная по информационным БП формула $\mathcal{M}_n$ с поднятыми отрицаниями, глубина которой удовлетворяет последнему из них, альтернирование не больше 3, а сложность не превосходит $7 \cdot 2^n$.

**Утверждение 21.4** Если система ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ состоит из попарно различных ФАЛ от БП $X(n)$, отличных от 0 и 1, то

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant 2^{1-n} \sum_{j=1}^{m} \left| N_{f_j} \right| .$$

**Следствие** $L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \geqslant 2^{n+1} - 2$

**Замечание.** Оценки утверждения 21.2, а также следствия из утверждений 14.5, 21.4 дают асимптотические равенства

$$L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \sim 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^{n+1}.$$

**Утверждение 21.5** Если для существенной БП $x_n$ ФАЛ $f \in P_2(n)$, и для любого (некоторого) $\sigma$, $\sigma \in B$, ФАЛ $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, то

$$L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f) \geqslant \min\{L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f|_{x_n=0}), L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f|_{x_n=1})\} + 2$$

$$\left(\text{соответственно } L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f) \geqslant L^{\mathsf{C}}_{\&,\vee}(f|_{x_n=\sigma}) + 1\right).$$

**Следствие**

$$L^{\mathsf{C}}(\mu_n) \geqslant 2^{n+1} + n - 1,$$
$$D(\mu_n) \geqslant n + 2.$$

**Замечание.** Из полученных в следствии оценок в силу утверждения 21.4 вытекает, что

$$L^{\mathsf{C}}(\mu_n) \sim 2^{n+1}, \qquad D(\mu_n) = n + O(1).$$