Основы кибернетики

Автор: профессор С. А. Ложкин

Лектор: профессор Д. С. Романов

Часть 3. Синтез управляющих систем

§ 1. Задача синтеза. Простейшие методы синтеза схем и связанные с ними верхние оценки сложности функций

В общем виде задача синтеза состоит в построении по заданной системе функций реализующей ее схемы, которая принадлежит заданному классу и на которой достигается минимальное значение заданного функционала сложности. Частным случаем этой задачи является рассмотренная в §7 главы 1 задача минимизации ДНФ. Дадим основные определения, связанные с задачей синтеза схем, и введем необходимые обозначения.

Пусть $\mathcal{U}$ — один из введенных в главе 2 классов схем, который является полным в том смысле, что каждую систему ФАЛ F можно реализовать некоторой его схемой Σ, а Ψ — какой-либо функционал сложности схем класса $\mathcal{U}$, то есть отображение $\mathcal{U}$ во множество неотрицательных действительных чисел. Будем считать, что функционал сложности Ψ обладает свойством *монотонности*, то есть $\Psi(\Sigma) \geqslant \Psi(\Sigma')$, если $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{U}$, и Σ' получается из Σ в результате удаления вершин или ребер (ср. с §7 гл. 1). Все введенные в главе 2 функционалы сложности этим свойством обладают.

Определим сложность $\Psi(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классе $\mathcal{U}$ как минимальное значение величины $\Psi(\Sigma)$ на множестве тех схем Σ из $\mathcal{U}$, которые реализуют F. При этом схема Σ, принадлежащая классу $\mathcal{U}$, которая реализует F и для которой $\Psi(\Sigma) = \Psi(F)$, называется *минимальной схемой* в классе $\mathcal{U}$ относительно функционала Ψ. В силу монотонности функционала Ψ, минимальная схема всегда может быть найдена среди приведенных схем.

Величину $\Psi(F)$ в том случае, когда функционал Ψ совпадает с введенным в главе 2 функционалом L (D, R, и т. д.), будем называть *сложностью* (соответственно *глубиной*, *рангом*, и т. д.) *системы ФАЛ* F. Введем функцию

$$\Psi(n) = \max_{f \in P_2(n)} \Psi(f),$$

которая, обычно, называется *функцией Шеннона для класса* $\mathcal{U}$ *относительно функционала сложности* Ψ. В дальнейшем сложность системы ФАЛ F относительно функционала Ψ для любого из введенных классов вида $\mathcal{U}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Б}}$ (вида $\mathcal{U}^{\mathrm{A}}$) будем обозначать через $\Psi^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Б}}(F)$ (соответственно $\Psi^{\mathrm{A}}(F)$), а функцию Шеннона для этого класса относительно Ψ — через $\Psi^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Б}}(n)$ (соответственно $\Psi^{\mathrm{A}}(n)$). В обозначениях классов $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$, $\mathcal{U}^{\Phi}_{\mathrm{Б}}$, а также связанных с ними функционалов сложности и функций Шеннона, нижний индекс Б вида $\mathrm{Б}_0$ будем, как обычно, опускать.

Отметим некоторые простейшие соотношения между введенными функциями. Очевидно, что для сложностей $\Psi'(F)$ и $\Psi''(F)$ системы ФАЛ F относительно функционала Ψ в классах схем $\mathcal{U}'$ и $\mathcal{U}''$ соответственно выполняется неравенство

$$\Psi'(F) \leqslant \Psi''(F),$$

если $\mathcal{U}' \supseteq \mathcal{U}''$. В частности,

$$\Psi_{\text{Б}}^{\text{С}}(F) \leqslant \Psi_{\text{Б}}^{\Phi}(F), \qquad \Psi^{\text{К}}(F) \leqslant \Psi^{\pi}(F)$$

и т. д. Довольно часто выделение подклассов из основных классов схем происходит за счет наложения различных дополнительных свойств на рассматриваемые схемы. В частности, из класса КС выделяют π-схемы, КС, обладающие свойствами разделительности, и т. п.

Заметим, что для сложности $L(F)$ системы ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ в любом из рассматриваемых классов схем выполняются неравенства

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant m} L(f_i) \leqslant L(F) \leqslant \sum_{i=1}^{m} L(f_i).$$

Задача синтеза допускает тривиальное решение, связанное с использованием переборного алгоритма, который, однако, имеет большую трудоемкость и практически не применим, если число БП больше 5.

Для реализации произвольных ФАЛ и получения верхних оценок их сложности можно использовать другой простейший метод синтеза схем, основанный на моделировании совершенной ДНФ. На основе этого моделирования, в частности, доказывается следующее утверждение.

Лемма 1.1

Для любой функции алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \neq 0$, *существуют формула* $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, *и* π*-схема* Σ_f, *которые реализуют* f *и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2n \cdot |N_f| - 1, \qquad L(\Sigma_f) \leqslant n\,|N_f|\,. \tag{1.1}$$

Следствие 1

В силу (1.1), *с учетом того, что ФАЛ* 0 *можно реализовать* π*-схемой сложности* 2, *а также формулой из* $\mathcal{U}^{\Phi}$, *имеющей сложность* 2, *выполняются неравенства*

$$L^{\mathrm{C}}(n) \leqslant L^{\Phi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n+1} - 1,$$
$$L^{\mathrm{K}}(n) \leqslant L^{\pi}(n) \leqslant n \cdot 2^{n}.$$

Следствие 2

В силу следствия 1 и с учётом следствия 2 из теоремы 2.1 главы 2 справедливо неравенство

$$D(n) \leqslant n + \lceil \log n \rceil + 2.$$

Следующее утверждение доказывается моделированием совершенной ДНФ с использованием контактного дерева.

Лемма 1.2

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$ *и* $f \neq 0$, *существуют* π*-схема* Σ_f *и формула* $\mathcal{F}_f$, $\mathcal{F}_f \in \mathcal{U}^{\Phi}$, *которые реализуют* f *и для которых справедливы неравенства:*

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^n + |N_f| - 2, \qquad L(\mathcal{F}_f) \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4.$$

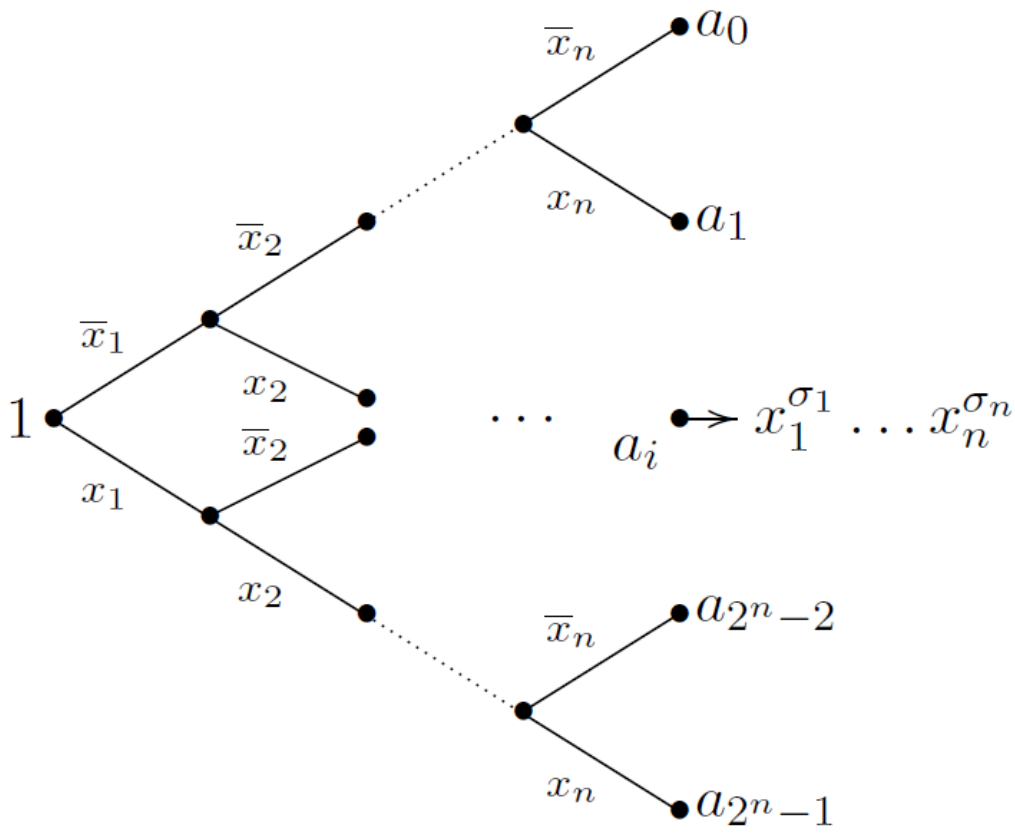


Рис. 1.1: $(1, 2^n)$-контактное дерево порядка n

Доказательство

В качестве Σ_f можно взять π-схему, которая получается из $(1, 2^n)$-КД порядка n от БП $x_1, \ldots, x_n$ (рис. 1.1) в результате снятия тех его выходов, где реализуются ЭК, не входящие в совершенную ДНФ ФАЛ f, отождествления остальных выходов КД и перехода к соответствующей приведенной КС. Так как при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей контакты, то

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2(2^n - 1) - (2^n - |N_f|) = 2^n + |N_f| - 2.$$

Продолжение доказательства

Формула $\mathcal{F}_f$ получается в результате моделирования построенной π-схемы Σ_f в классе формул с поднятыми отрицаниями (см. §2 гл. 2), и поэтому

$$R(\mathcal{F}_f) = L(\Sigma_f), \qquad L(\mathcal{F}_f) = R(\mathcal{F}_f) + L_-(\Sigma_f) - 1,$$

где $L_-(\Sigma_f)$ — число размыкающих контактов в схеме Σ. Следовательно,

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant L(\Sigma_f) + 2^n - 2 \leqslant 2^{n+1} + |N_f| - 4,$$

так как число размыкающих контактов в КД порядка n равно $2^n - 1$.
Лемма доказана. □

Замечание

Построенная π-схема Σ_f является ККС, сложность которой удовлетворяет (1.1).

Следствие

$$L^{\pi}(n) \leqslant 2^{n+1} - 2, \tag{1.2}$$

$$L^{\Phi}(n) \leqslant 3 \cdot 2^{n} - 4. \tag{1.3}$$

К схемам, полученным на основе простейших методов синтеза, полезно применять с целью уменьшения их сложности эквивалентные преобразования и, в частности, следующие операции приведения.

Пусть вершина w СФЭ Σ не достижима из ее вершины v, а СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ в результате удаления вершины v, объявления вершины w начальной вершиной всех исходивших из v дуг и переноса в вершину w всех выходных БП, приписанных вершине v. Тогда СФЭ Σ' считается результатом применения к СФЭ Σ *операции присоединения вершины v к вершине w*. Заметим, что для любых двух вершин схемы одну из них всегда можно присоединить к другой. Две вершины СФЭ называются *эквивалентными*, если в них реализуются равные ФАЛ. Применяя к СФЭ Σ операцию присоединения одной из двух эквивалентных вершин к другой, мы получим СФЭ Σ', которая, очевидно, эквивалентна Σ.

Приведенная схема называется *строго приведенной*, если в ней нет эквивалентных вершин. Из любой СФЭ можно получить эквивалентную ей строго приведенную СФЭ с помощью операции присоединения эквивалентных вершин и операции удаления висячих вершин.

Аналогичным образом определяется операция присоединения вершин в КС, с той лишь разницей, что на нее не накладываются какие-либо ограничения, связанные с достижимостью вершин.

Для множества ФАЛ G, $G \subseteq P_2(n)$, через $\overrightarrow{G}$ будем обозначать систему, состоящую из всех различных ФАЛ множества G, упорядоченных в соответствии с номерами их столбцов значений. При этом систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$ будем называть *универсальной системой* порядка n.

Лемма 1.3

Для каждого натурального n в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{C}}$ существует СФЭ U_n, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$ и сложность которой равна $2^{2^n} - n$.

Доказательство.

В силу полноты базиса, в $\mathcal{U}_{\text{Б}}^{\text{C}}$ существует система формул Σ от БП $x_1, \ldots, x_n$, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{P}_2(n)$. Искомая СФЭ U_n является строго приведенной СФЭ, которая эквивалентна Σ и получается из нее в результате применения операций присоединения эквивалентных вершин, а также операций удаления висячих вершин (см. §4 главы 2). Действительно, из построения следует, что число всех вершин СФЭ U_n, включая n ее входов, равно 2^{2^n} и поэтому

$$L(U_n) = 2^{2^n} - n.$$

Лемма доказана. □

Следствие

$$L_{\text{Б}}^{\text{C}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \leqslant 2^{2^n} - n.$$

§ 2. Нижние оценки сложности ФАЛ, реализация некоторых ФАЛ и минимальность некоторых схем

Рассмотрим сначала простейшие нижние оценки сложности ФАЛ и связанные с ними примеры минимальных схем.

Лемма 2.1

Если ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ *существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n-1, \qquad L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n. \tag{2.1}$$

Если при этом ФАЛ f *не является монотонной ФАЛ (каждая БП* x_i, $i \in [1,k]$, *не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ* f*), то*

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant n \qquad (\text{соответственно } L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant n+k). \tag{2.2}$$

Доказательство

Пусть Σ_f — минимальная по сложности СФЭ из $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, реализующая ФАЛ f. Из существенной зависимости ФАЛ f от БП $x_1, \ldots, x_n$ следует, что $R(\Sigma_f) \geqslant n$, и поэтому, в силу соотношений (4.1) главы 2,

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant L_{\&,\vee}(\Sigma_f) \geqslant n - 1.$$

Если же, кроме того, ФАЛ f не является монотонной ФАЛ, то схема Σ_f должна содержать хотя бы один ФЭ $\neg$ и, следовательно, в указанном случае

$$L^{\mathrm{C}}(f) = L(\Sigma_f) \geqslant n.$$

Таким образом, первые из неравенств (2.1) и (2.2) доказаны.

Продолжение доказательства

Пусть теперь Σ_f — минимальная по сложности $(1,1)$-КС, реализующая ФАЛ f. Из существенной зависимости ФАЛ f от БП x_i, $i \in [1,n]$, следует, что либо контакт вида x_i, либо контакт вида $\overline{x}_i$ встречается в КС Σ_f, и поэтому

$$L^{\mathrm{K}}(f) = L(\Sigma_f) \geqslant n.$$

Если же, кроме того, БП x_i, $i \in [1,k]$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП ФАЛ f, то как контакт вида x_i, так и контакт вида $\overline{x}_i$ входят в Σ_f, и, следовательно, в данном случае

$$L^{\mathrm{K}}(f) = L(\Sigma_f) \geqslant n + k.$$

Лемма доказана. $\square$

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}(\ell_n) \geqslant n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\ell_n) \geqslant 2n,$$
$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \geqslant 2^n + n, \qquad L^{\mathrm{K}}(\mu_n) \geqslant 2^n + 2n.$$

Замечание

Нижние оценки сложности ФАЛ $f = s_n^{[0,n-1]}$, вытекающие из леммы 2.1, доказывают минимальность π-схемы, моделирующей ЭД $\overline{x}_1 \vee \cdots \vee \overline{x}_n = f$, в классе КС и минимальность формулы $\overline{(x_1 \cdots x_n)} = f$ в классе СФЭ, что устанавливает равенства $L^{\mathrm{K}}(f) = n$ и $L^{\mathrm{C}}(f) = n$.

Лемма 2.2

Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, *состоящей из попарно различных ФАЛ отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant m \qquad (\text{соответственно } L^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}(F) \geqslant m). \tag{2.3}$$

Доказательство.

Второе из неравенств (2.3) вытекает из того, что все ФАЛ f_i, $i = 1, \ldots, m$, реализуются на попарно различных выходах СФЭ, отличных от ее входов.

Пусть теперь Σ_F — приведенная $(1, m)$-КС, реализующая систему ФАЛ F. Из приведенности Σ_F и условий леммы вытекает, что Σ_F — связный граф с не менее чем $(m + 1)$ вершиной, и поэтому, в силу неравенства (1.2) главы 2,

$$L(\Sigma_F) \geqslant |V(\Sigma_F)| - 1 \geqslant m.$$

Лемма доказана. □

Следствие

$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \geqslant 2^n,$$

$$L^{\mathrm{C}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \geqslant 2^n,$$

$$L^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \geqslant 2^{2^n} - 2.$$

Замечание

В силу следствия универсальная СФЭ U_n, построенная в лемме 1.3, является минимальной по сложности СФЭ в классе $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\mathrm{Б}}$.

Довольно часто задачу синтеза приходится решать для следующих ФАЛ и систем ФАЛ:
линейной ФАЛ порядка n, то есть ФАЛ ℓ_n или ФАЛ $\overline{\ell}_n$;
мультиплексорной ФАЛ μ_n порядка n;
дешифратора $\overrightarrow{Q}_n$ (дизъюнктивного дешифратора $\overrightarrow{J}_n$) порядка n;
универсальной системы $\overrightarrow{P}_2(n)$ порядка n.
Рассмотрим некоторые схемные реализации и соответствующие им верхние оценки сложности для указанных ФАЛ и систем ФАЛ. Будем, как обычно, называть (схемным) мультиплексором, дешифратором, дизъюнктивным дешифратором и универсальным многополюсником любую схему, которая реализует соответствующую систему ФАЛ.

Лемма 2.3

Для любого натурального n выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{Q}_n) \leqslant 2^{n+1} - 2; \tag{2.4}$$

$$L^{\mathrm{C}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^n + O(n \cdot 2^{\frac{n}{2}}), \quad L^{\mathrm{K}}(\overrightarrow{J}_n) \leqslant 2^{n+2} - 6; \tag{2.5}$$

$$L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 3 \cdot 2^n - 2, \quad L^{\Phi}(\mu_n) \leqslant 2^{n+2} - 4; \tag{2.6}$$

$$L^{\mathrm{C}}(\ell_n) \leqslant 4n - 4, \quad L^{\mathrm{C}}(\bar{\ell}_n) \leqslant 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor. \tag{2.7}$$

Доказательство

В классе $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$ построим схемный дешифратор порядка n, удовлетворяющий первому неравенству (2.4), следующим образом:
разобьем набор БП $X(n)$ на группы $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$, где $q = \lceil n/2 \rceil$;
возьмем дешифраторы Σ' и Σ'' от БП x' и x'' порядка q и $(n-q)$ соответственно, реализующие каждую свою систему ЭК по лемме 1.1;
объединим СФЭ Σ' и Σ'', после чего конъюнктируем каждый выход Σ' с каждым выходом Σ'', а выходы всех использованных для этого 2^n ФЭ & (и только их) объявим выходами искомого дешифратора.

Продолжение доказательства

Аналогично строится дизъюнктивный дешифратор порядка n в классе $\mathcal{U}^C$, удовлетворяющий (2.5). Искомым контактным (каскадным) дешифратором порядка n является $(1, 2^n)$-контактное дерево, показанное на рис. 1.1, а инверсная к нему каскадная контактная схема (см. §10 гл. 2) представляет собой дизъюнктивный контактный дешифратор порядка n, удовлетворяющий (2.5).

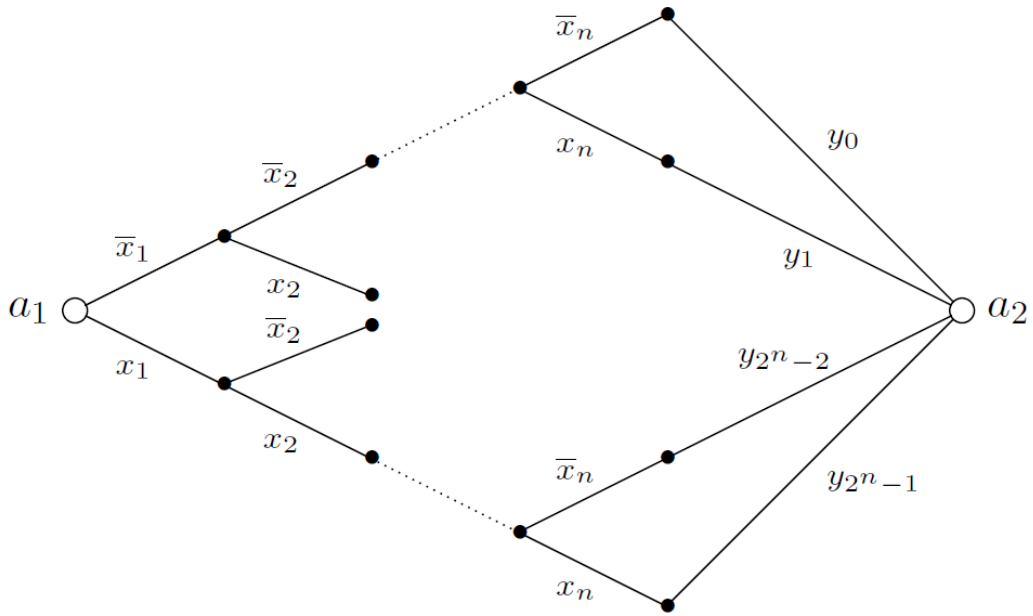


Рис. 2.1: π-схема для мультиплексорной функции

Продолжение доказательства

Искомым контактным мультиплексором порядка n является π-схема, приведенная на рис. 2.1. Заметим, что сложность схем, показанных на рис. 1.1 и 2.1, равна $2^{n+1}-2$ и $3\cdot 2^n-2$ соответственно, то есть удовлетворяет неравенствам (2.4) и (2.6), причем число размыкающих контактов в каждой из них равно 2^n-1.

В результате моделирования указанной π-схемы можно построить бесповторную по информационным БП формулу

$$\mathcal{F}_n\left(x_1,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_{2^n-1}\right)=$$

$$=\bigvee_{\sigma_1\in B} x_1^{\sigma_1}\left(\bigvee_{\sigma_2\in B} x_2^{\sigma_2}\left(\cdots\left(\bigvee_{\sigma_n\in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}\right)\cdots\right)\right),$$

которая удовлетворяет второму неравенству (2.6), так как реализует ФАЛ μ_n и имеет сложность $4\cdot 2^n-4$.

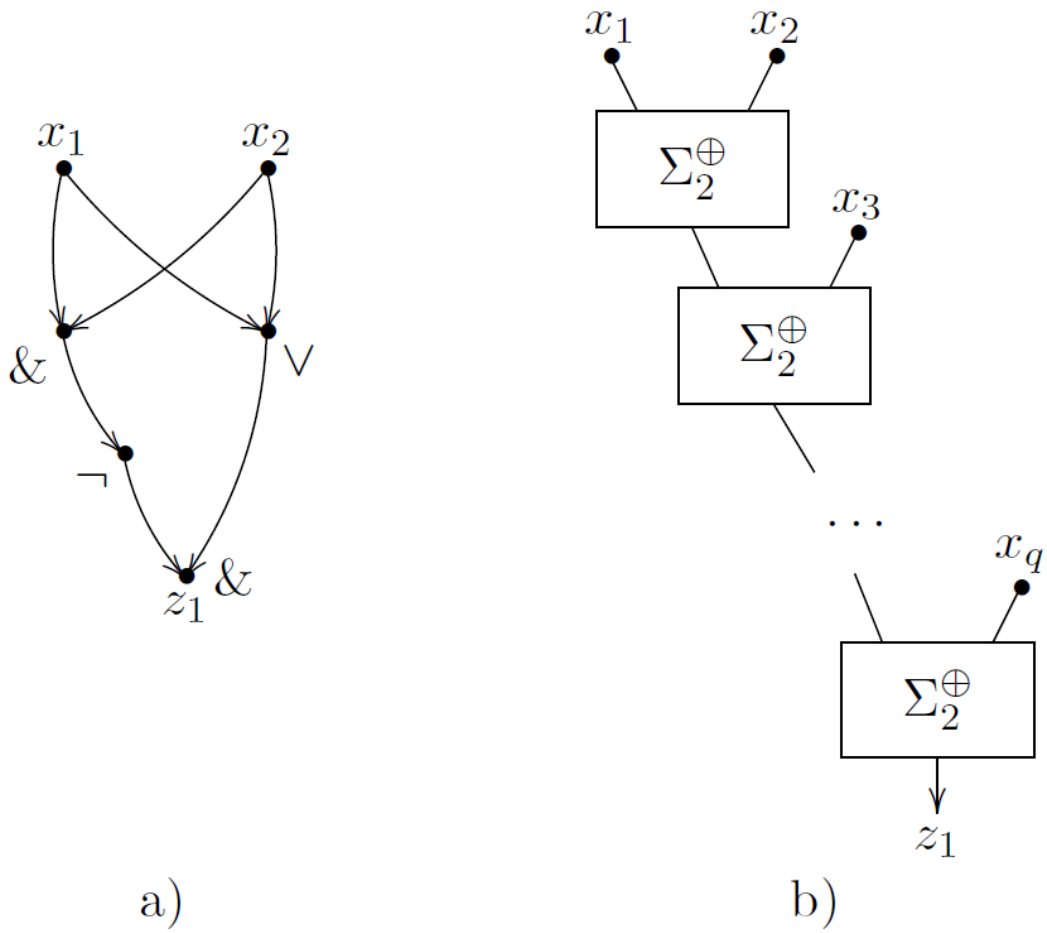


Рис. 2.2: пример суперпозиции СФЭ

Продолжение доказательства

Неравенства (2.7) при $n = 1$, очевидно, выполняются. Искомой СФЭ, реализующей линейную ФАЛ ℓ_n, $n \geqslant 2$, со сложностью (2.7), является СФЭ $\Sigma_n^{\oplus}$, показанная на рис. 2.2a,b. Аналогичная СФЭ для ФАЛ $\overline{\ell}_n$ получается в результате замены ФЭ $\&$ на ФЭ $\vee$ и ФЭ $\vee$ на ФЭ $\&$ в первой подсхеме вида $\Sigma_2^{\oplus}$ схемы $\Sigma_n^{\oplus}$ (см. рис. 2.2a). Лемма доказана. $\square$

Следствие

$$L^C(\overrightarrow{Q}_n) \sim L^C(\overrightarrow{J}_n) \sim 2^n.$$

Установим, в заключение, ряд более точных нижних оценок сложности ФАЛ и на их основе докажем минимальность некоторых схем.
Докажем сначала, что $(1, 2^n)$-контактное дерево — минимальный контактный дешифратор порядка n в классе разделительных (по выходам) КС.

Лемма 2.4

Если разделительная по выходам $(1, m)$-КС Σ реализует m различных ФАЛ, отличных от 0, то

$$L(\Sigma) \geqslant 2m - 2.$$

Доказательство.

Пусть Σ — приведенная и, следовательно, связная КС от БП $x_1, \ldots, x_n$. Из разделительности Σ следует, что при любом α, $\alpha \in B^n$, сеть $\Sigma|_\alpha$ состоит не менее чем из m связных компонент. Заметим, что удаление всякого ребра увеличивает число связных компонент графа не более чем на единицу, и поэтому число $|E(\Sigma|_{\overline{\alpha}})|$ — число контактов, не проводящих на наборе α, — удовлетворяет неравенству

$$|E(\Sigma|_{\overline{\alpha}})| \geqslant m - 1. \tag{2.8}$$

Суммируя (2.8) по всем α, $\alpha \in B^n$, и учитывая, что каждый контакт КС Σ не проводит ровно на половине всех наборов куба B^n, получим

$$2^{n-1} L(\Sigma) \geqslant 2^n (m-1), \qquad L(\Sigma) \geqslant 2m - 2.$$

Лемма доказана. □

Следствие

Контактное дерево порядка n является минимальной разделительной $(1, 2^n)$-КС, реализующей систему ФАЛ Q_n.

Действительно, в соответствии с леммой 2.4, сложность разделительной $(1, 2^n)$-КС не меньше чем $2^{n+1} - 2$, то есть не меньше сложности $(1, 2^n)$-контактного дерева порядка n.

Лемма 2.5

Если система ФАЛ $F = (f_1, \ldots, f_m)$ *состоит из попарно различных ФАЛ от БП* $X(n)$*, отличных от* 0 *и* 1*, то*

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant 2^{1-n} \sum_{j=1}^{m} \left| N_{f_j} \right|.$$

Доказательство.

Возьмем приведенную $(1, m)$-КС Σ, реализующую систему ФАЛ F, и заметим, что при любом α, $\alpha \in B^n$, в сети $\Sigma|_\alpha$ имеется связная компонента, которая содержит вход Σ и те ее выходы, где реализуемые ФАЛ обращаются в 1 на наборе α. Из неравенства (1.2) главы 2 следует, что при этом

$$|E(\Sigma|_\alpha)| \geqslant f_1(\alpha) + \cdots + f_m(\alpha).$$

Суммируя полученное неравенство по всем наборам α, $\alpha \in B^n$, придем (см. доказательство леммы 2.4) к неравенству

$$2^{n-1} L(\Sigma) \geqslant \sum_{j=1}^{m} |N_{f_j}|,$$

из которого вытекает неравенство леммы.
Лемма доказана. □

Следствие

$$L^{\mathrm{K}}(J_n) \geqslant 2^{n+1} - 2.$$

Замечание

В силу следствия $(1, 4)$-КС с входом a, которая состоит из двух непересекающихся по внутренним вершинам $(a - a)$-цепей (циклов) с ЭК проводимости $\overline{x}_1 x_2 x_1$ и $\overline{x}_1 \overline{x}_2 x_1$, является минимальным дизъюнктивным контактным дешифратором порядка 2.

Лемма 2.6

Если для ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, *и для любого* σ, $\sigma \in B$, *ФАЛ* $f_\sigma = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, *то*

$$L^{\mathrm{C}}_{\&,\vee}(f) \geqslant \min\{L^{\mathrm{C}}_{\&,\vee}(f_0), L^{\mathrm{C}}_{\&,\vee}(f_1)\} + 2. \qquad (2.9)$$

Доказательство

Пусть Σ — минимальная по числу ФЭ $\&$ и $\vee$ СФЭ из класса $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, которая реализует ФАЛ f и которая не содержит цепочек из двух последовательно соединенных ФЭ $\neg$. Пусть константа σ, $\sigma \in B$, равна 0 тогда и только тогда, когда БП x_n подается в Σ либо на вход ФЭ $\&$, либо на вход ФЭ $\neg$, выход которого поступает на вход ФЭ $\vee$.

Продолжение доказательства

Рассмотрим СФЭ $\widehat{\Sigma}$, которая реализует ФАЛ f_σ, $f_\sigma \not\equiv 0, 1$, и получена из СФЭ Σ в результате подстановки $x_n = \sigma$, а также последующего ЭП на основе тождеств $\underline{\tau}^{\text{ПК}}$ (см. §5 гл. 2) вплоть до устранения всех вхождений констант. Убедимся в том, что при указанном ЭП будут удалены по крайней мере два ФЭ типа & или $\vee$.

Продолжение доказательства

Действительно, в случае $\sigma = 0$ из СФЭ Σ будет удален ФЭ $\mathcal{E}'$, являющийся либо ФЭ типа $\&$, на вход которого подается БП x_n, либо ФЭ типа $\vee$, на вход которого подается выход ФЭ $\neg$, присоединенного к входу x_n. Заметим, что выход ФЭ $\mathcal{E}'$ не может быть выходом схемы и не может быть входом ФЭ $\neg$, выход которого является выходом схемы, так как при этом ФАЛ f_σ была бы равна константе. Следовательно, в СФЭ Σ имеется ФЭ $\mathcal{E}''$ типа $\&$ или $\vee$, на вход которого поступает либо выход $\mathcal{E}'$, либо выход ФЭ $\neg$, присоединенного к выходу $\mathcal{E}'$. Легко видеть, что ФЭ $\mathcal{E}''$ тоже будет удален при переходе от Σ к $\widehat{\Sigma}$ и, следовательно, справедливы неравенства

$$L_{\&,\vee}(f) = L_{\&,\vee}(\Sigma) \geqslant L_{\&,\vee}(\widehat{\Sigma}) + 2 \geqslant L_{\&,\vee}(f_\sigma) + 2,$$

из которых вытекает (2.9).
Лемма доказана. □

Следствие 1

$$L^{\mathrm{C}}(\mu_n) \geqslant 2^{n+1} + n - 1. \tag{2.10}$$

Действительно, (2.10) получается в результате применения леммы 2.6 последовательно ко всем информационным БП $y_{2^n-1}, \ldots, y_1$ с учетом того, что каждая получившаяся в результате соответствующих подстановок констант ФАЛ существенно зависит от БП $x_1, \ldots, x_n, y_0$, а сама функция μ_n немонотонна.

Следствие 2

Из (2.10) *в силу леммы 4.1 главы 2 вытекает неравенство*

$$D(\mu_n) \geqslant n + 1.$$

Замечание

В силу следствия 1 формула $\overline{x}_1 y_0 \vee x_1 y_1$ является минимальной СФЭ, реализующей ФАЛ μ_1, и $L^{\mathrm{C}}(\mu_1) = 4$.

§ 3. Метод каскадов для контактных схем и схем из функциональных элементов. Метод Шеннона

Приведенные в первом параграфе этой части простейшие методы синтеза позволяют строить формулы и π-схемы, специфика которых не допускает многократного использования «промежуточных результатов». Метод каскадов является достаточно простым и в то же время довольно эффективным методом синтеза как КС, так и СФЭ, который позволяет это делать. Он связан с последовательным разложением заданных ФАЛ по БП и рекурсивным построением схемы, реализующей эти ФАЛ.

Метод каскадов позволяет по произвольной заданной системе функций алгебры логики $F = (f_1, \ldots, f_m)$, $F \in P_2^m(n)$, строить $(1, m)$-КС Σ_F, $\Sigma_F \in \mathcal{U}^{\mathrm{K}}$, и СФЭ U_F, $U_F \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, которые реализуют F. Будем считать, что все ФАЛ $f_1, f_2, \ldots, f_m$ системы F различны, отличны от констант, и для каждой БП x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, среди них есть ФАЛ, существенно зависящая от x_i.

Разложим ФАЛ $f_1, f_2, \ldots, f_m$ сначала по БП x_1, потом по БП x_2 и так далее. При этом построим последовательности множеств G_i и $\widehat{G}_i$, состоящих из ФАЛ от БП $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, такие, что:
G_i состоит из всех различных ФАЛ $g(x_i, \ldots, x_n)$ вида

$$g = f_j(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где $1 \leqslant j \leqslant m$, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}) \in B^{i-1}$;
$\widehat{G}_i$ состоит из всех различных функций g, $g \in G_i$, которые существенно зависят от x_i.
Легко видеть, что

$$G_1 = \{f_1, \ldots, f_m\}, \qquad \widehat{G}_n \subseteq \{x_n, \overline{x}_n\},$$

а множества ФАЛ $\widehat{G}_1, \ldots, \widehat{G}_n$ не пусты и попарно не пересекаются.

Заметим, что любую ФАЛ g, $g \in \widehat{G}_i$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, можно представить в виде

$$g = \mu(x_i, g_0, g_1) = \overline{x}_i g_0 \vee x_i g_1, \tag{3.1}$$

где $g_\sigma = g(\sigma, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, и, следовательно,
$g_\sigma \in G_{i+1} \cup \{0, 1\}$ для всех σ, $\sigma \in B$.
Если при этом для некоторого σ, $\sigma \in B$, ФАЛ $g_{\overline{\sigma}}$ равна 0, то вместо (3.1) будем использовать разложение

$$g = x_i^\sigma g_\sigma, \tag{3.2}$$

где $g_\sigma \in G_{i+1} \cup \{1\}$.

С помощью операций присоединения одного или двух противоположных контактов построим ККС $\check{\Sigma}_F$, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{G}_F$, где $G_F = \widehat{G}_1 \cup \ldots \cup \widehat{G}_n$. При этом для каждого i, $i = n, (n-1), \ldots, 1$, каждая ФАЛ g, $g \in \widehat{G}_i$, реализуется согласно (3.1) ((3.2)) на выходе v, который при $\alpha = 0, 1$ (соответственно $\alpha = \sigma$) соединен контактом вида x_i^α с тем выходом v_α, где реализуется ФАЛ $g_\alpha = g(\alpha, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ так, как это показано на рис. 3.1a (соответственно рис. 3.1b).

Для получения искомой КС Σ_F достаточно «снять» пометки с тех выходных вершин КС $\check{\Sigma}_F$, в которых реализуются ФАЛ, отличные от $f_1, \ldots, f_m$.

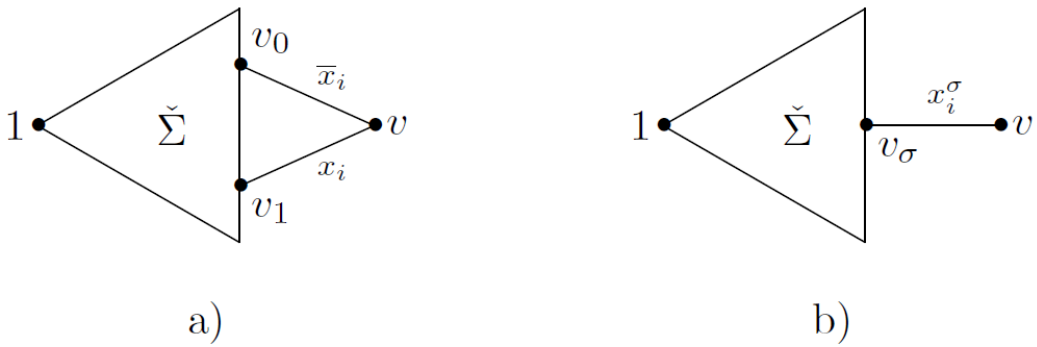


Рис. 3.1: присоединение одного или двух противоположных контактов

Аналогичным образом по методу каскадов строится и СФЭ $\check{U}_F$, реализующая систему ФАЛ $\overrightarrow{G}_F$, с той лишь разницей, что:
сначала реализуются все ФАЛ вида $\overline{x}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, которые встречаются в КС Σ_F;
для всех i, $i = (n-1), \ldots, 1$, разложение (3.1), где $g \in \widehat{G}_i$ и $g_0, g_1 \in G_{i+1}$, реализуется так, как показано на рис. 3.2a, а разложение (3.2), применяемое в случае $g_{\overline{\sigma}} = 0$ (разложение

$$g = x_i^{\overline{\sigma}} \vee g_\sigma x_i^\sigma = x_i^{\overline{\sigma}} \vee g_\sigma \tag{3.3}$$

в случае $g_{\overline{\sigma}} = 1$), — так, как показано на рис. 3.2b (соответственно 3.2c);

каждая ФАЛ вида $g_\sigma x_i^\sigma$, используемая в предыдущем пункте при реализации разложений вида (3.1) или (3.2) для различных ФАЛ g, реализуется только один раз.
Как и в случае КС, СФЭ U_F, реализующая систему ФАЛ F и построенная по методу каскадов, получается из СФЭ $\check{U}_F$ в результате «снятия» тех выходов, в которых реализуются ФАЛ, отличные от ФАЛ из F.

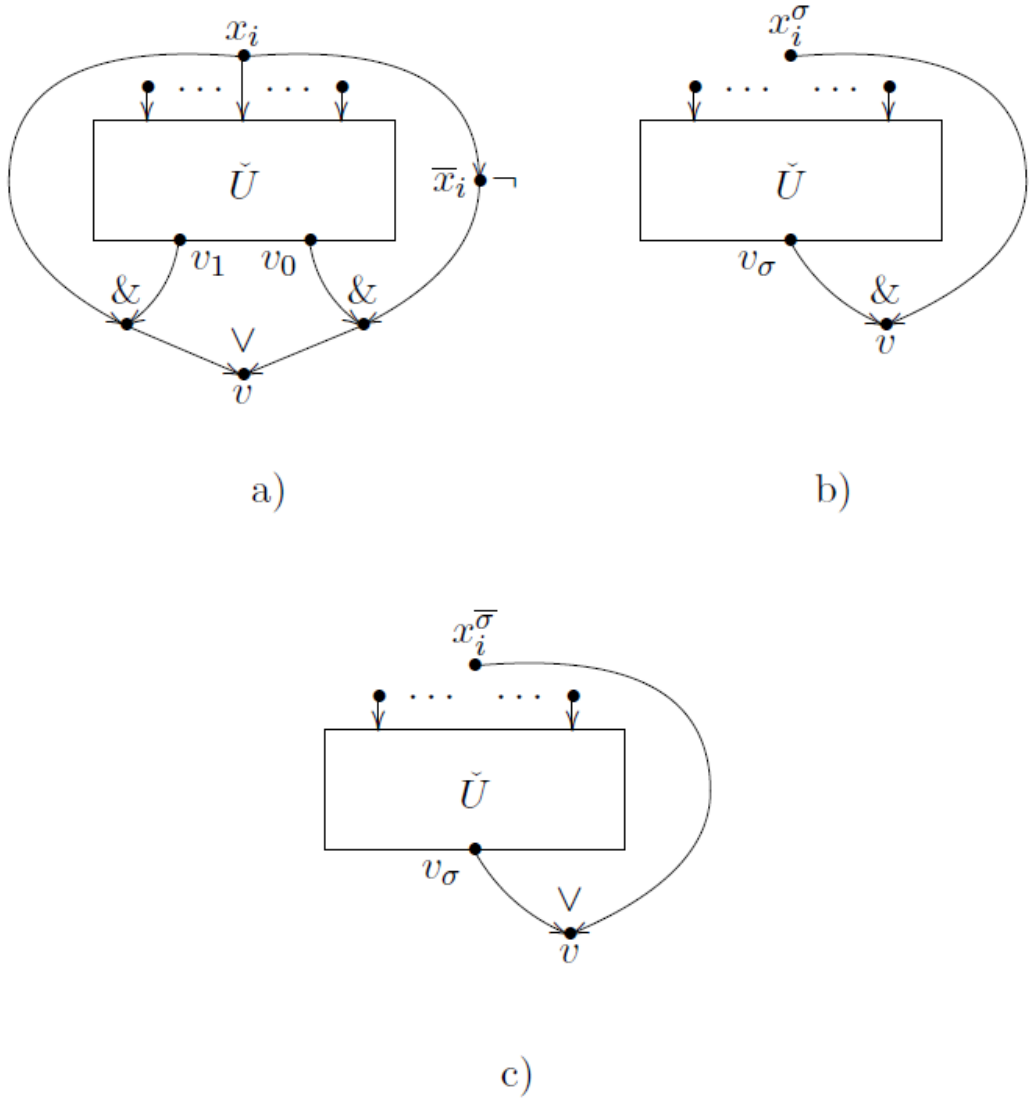


Рис. 3.2: к моделированию операций присоединения контактов в классе СФЭ

Пусть, например, $F = (f_1, f_2)$, где

$$f_1 = \overline{x}_1 x_2 (x_3 \oplus x_4) \vee x_1 (x_2 \vee x_3 \overline{x}_4),$$
$$f_2 = x_1 (x_3 \oplus x_4) \vee \overline{x}_1 x_4.$$

Тогда:

$$\widehat{G}_1 = G_1 = \{f_1, f_2\};$$
$$\widehat{G}_2 = \{x_2 (x_3 \oplus x_4), x_2 \vee x_3 \overline{x}_4\}, \quad G_2 = \widehat{G}_2 \cup \{x_3 \oplus x_4, x_4\};$$
$$\widehat{G}_3 = \{x_3 \oplus x_4, x_3 \overline{x}_4\}, \quad G_3 = \widehat{G}_3 \cup \{x_4\};$$
$$\widehat{G}_4 = \{x_4, \overline{x}_4\}.$$

На рис. 3.3 показана построенная для данной системы ФАЛ КС $\check{\Sigma}_F$, вершины которой помечены сопоставленными им ФАЛ, на рис. 3.4 — соответствующая ей КС Σ_F, а на рис. 3.5 — СФЭ U_F.

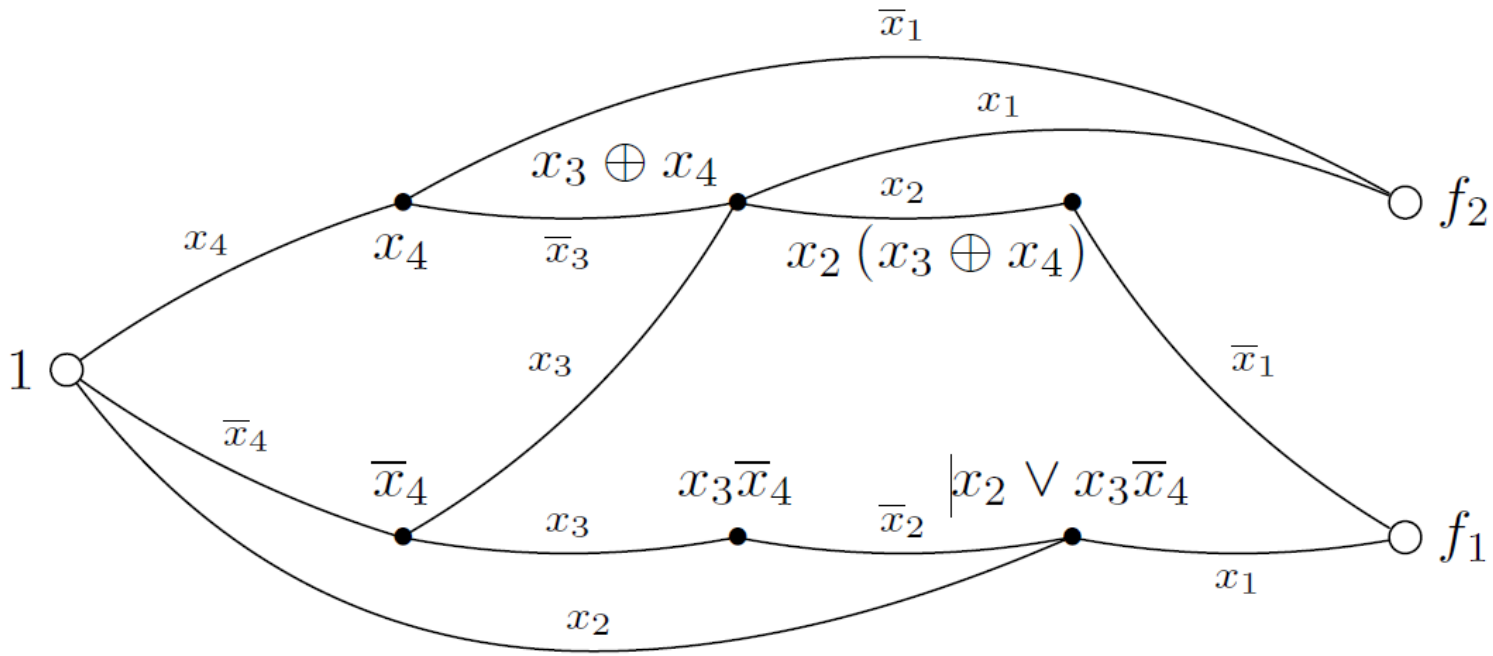


Рис. 3.3: пример КС с помеченными вершинами, построенной методом каскадов

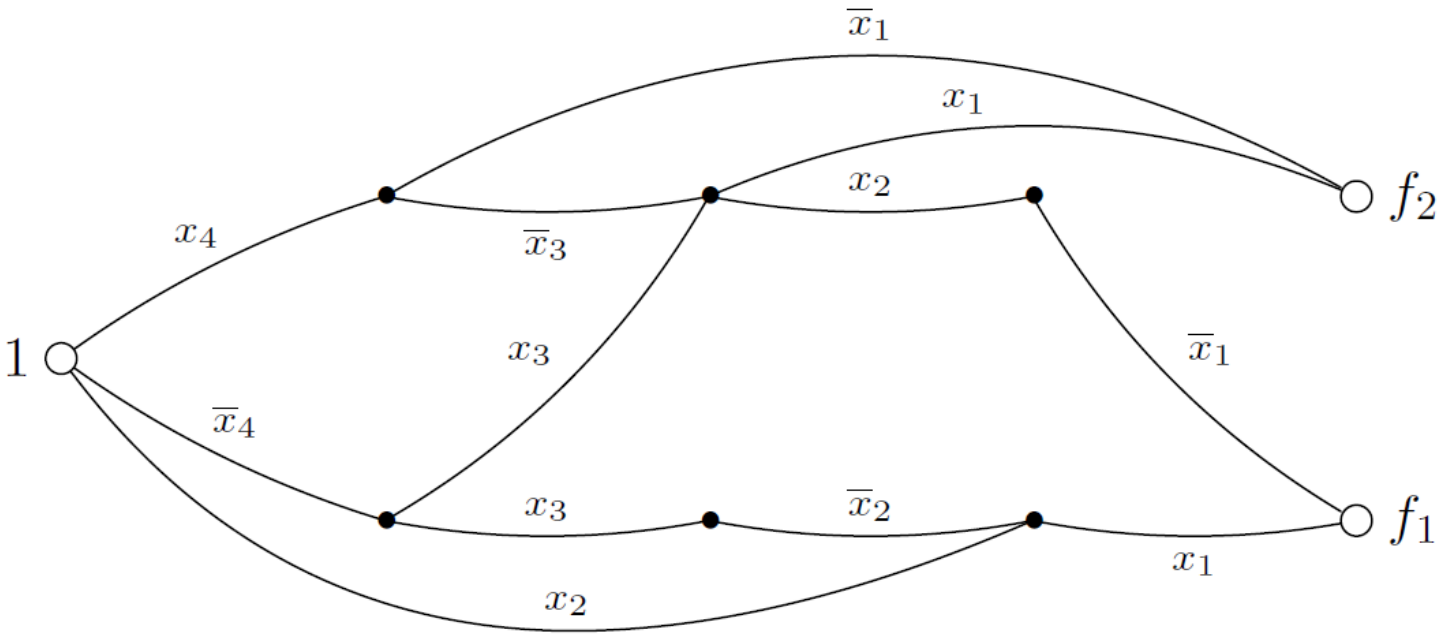


Рис. 3.4: пример КС, построенной методом каскадов

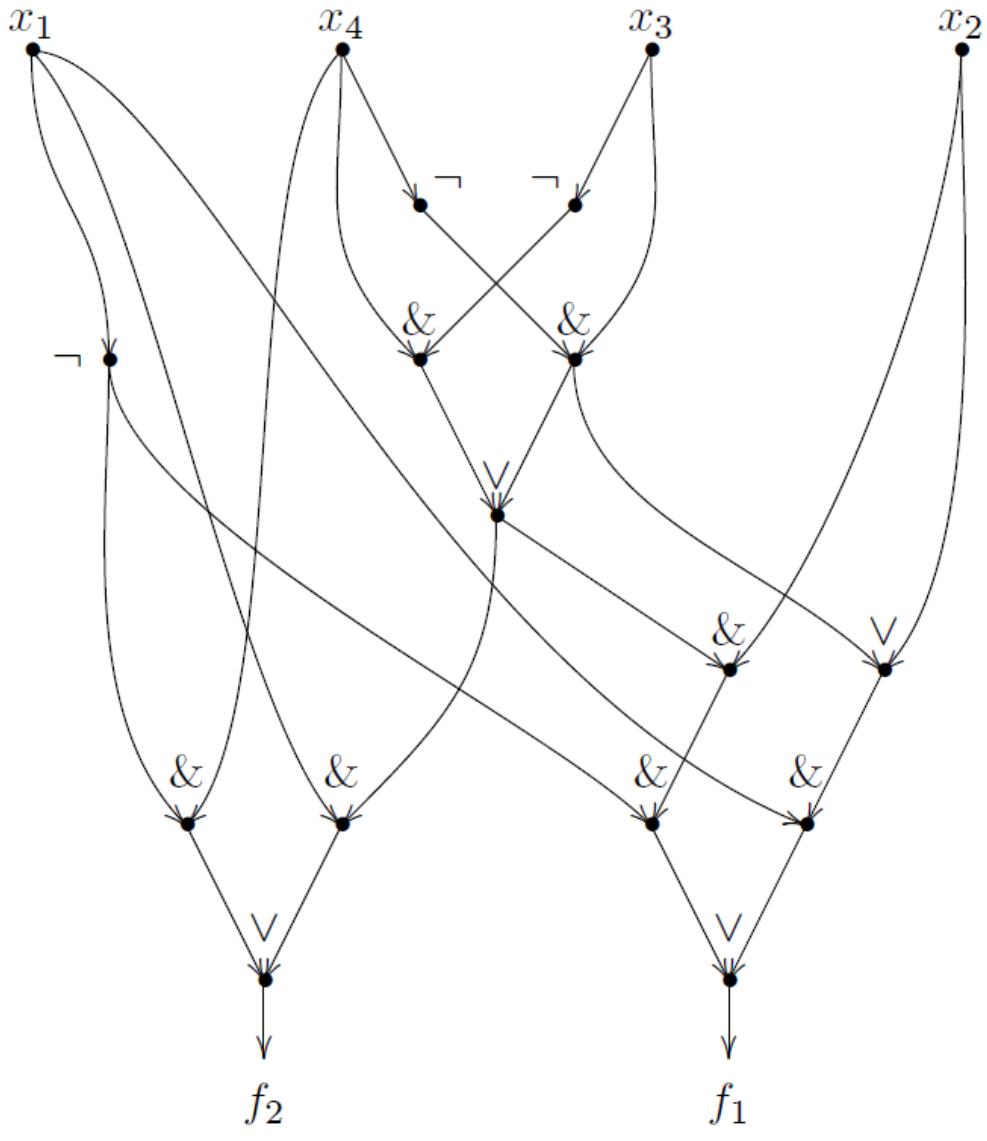


Рис. 3.5: СФЭ для системы ФАЛ F, построенная методом каскадов

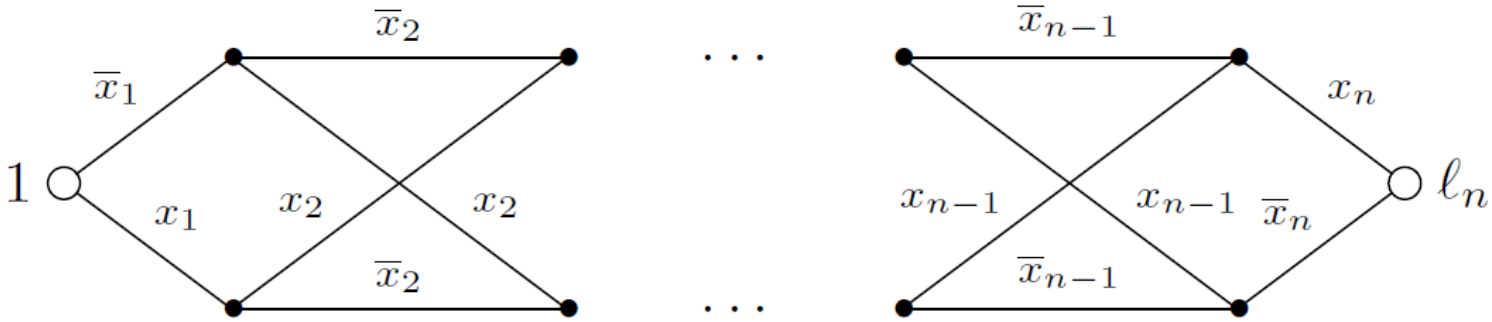


Рис. 3.6: схема Кардо для линейной функции ℓ_n

Другим примером КС, построенной по методу каскадов для линейной ФАЛ ℓ_n, где $n \geqslant 2$, является известная схема Кардо, показанная на рис. 3.6. Заметим, что эта КС имеет сложность $(4n-4)$ и является минимальной. В то же время СФЭ, построенная для ℓ_n, $n \geqslant 2$, по методу каскадов имеет сложность $(7n-9)$ и не является минимальной, так как имеет бóльшую сложность по сравнению со схемой $\Sigma_n^{\oplus}$ сложности $(4n-4)$, показанной на рис. 2.2. Аналогичные оценки справедливы для ФАЛ $\overline{\ell}_n$ (см. лемму 2.3).

При построении по методу каскадов $(1, 2^n)$-КС, реализующей систему функций алгебры логики $\overrightarrow{Q}_n$, мы получим контактное дерево порядка n, показанное на рис. 1.1. Как будет показано в §6, это КД не является минимальным контактным дешифратором.

Аналогичным образом с помощью метода каскадов можно построить контактный универсальный многополюсник сложности не больше, чем $2 \cdot 2^{2^n}$, а также контактный мультиплексор порядка n и сложности $3 \cdot 2^n - 2$, показанный на рис. 2.1 (см. лемму 2.3). Заметим, что указанный мультиплексор получается при разложении ФАЛ μ_n сначала по адресным, а затем по информационным БП. В то же время, контактный мультиплексор порядка n, построенный по методу каскадов при разложении ФАЛ μ_n сначала по информационным, а затем по адресным БП, содержит КД порядка 2^n от информационных БП и поэтому имеет сложность не меньше, чем 2^{2^n+1}. Это показывает, что выбор «правильного» порядка переменных при разложении ФАЛ может существенно уменьшить сложность КС, построенной по методу каскадов.

Учитывая все сказанное выше, дополним леммы 1.3 и 2.3 следующим утверждением.

Лемма 3.1

Для любого натурального n и $\sigma \in B$ выполняются неравенства:

$$L^{\mathrm{K}}\left(\ell_n^\sigma\right) \leqslant 4n - 4 + \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{P}_2(n)\right) \leqslant 2 \cdot 2^{2^n}.$$

Рассмотрим, в заключение, метод Шеннона для синтеза КС и СФЭ, который позволяет установить порядок роста функций Шеннона $L^{\mathrm{K}}(n)$ и $L^{\mathrm{C}}(n)$.
Метод Шеннона заключается в выборе некоторого параметра q, $1 \leqslant q \leqslant n$, и построении схемы Σ_f, реализующей произвольную ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ на основе ее разложения по части переменных (см. равенство (2.5) из гл. 1):

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1},\ldots,\sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot f_{\sigma''}(x'), \qquad (3.4)$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$ и $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$ при всех σ'', $\sigma'' \in B^{n-q}$.

При этом КС (СФЭ в базисе Б_0) Σ_f представляет собой корректную суперпозицию вида $\Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$-контактное дерево (соответственно мультиплексор порядка $(n-q)$) от адресных БП x'', чьи входы (соответственно информационные входы) при выполнении указанной суперпозиции присоединяются к выходам универсального многополюсника Σ' порядка q от БП x' в соответствии с (3.4).

Полагая

$$q = \lfloor \log (n - 2 \log n) \rfloor ,$$

построим для ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ указанным выше способом КС (СФЭ в базисе Б_0) Σ_f, где Σ'' — $(2^{n-q}, 1)$-КД порядка $(n-q)$ (соответственно формула $\mathcal{F}_{n-q}$ из леммы 2.3), а Σ' — универсальный многополюсник из леммы 3.1 (соответственно леммы 1.3). Корректность построенной суперпозиции в случае КС обеспечивается разделительностью КД.

Для сложности полученной схемы Σ_f будут справедливы оценки

$$L\left(\Sigma_f\right) \leqslant 2 \cdot 2^{2^q} + 2 \cdot 2^{n-q} \leqslant \frac{2^{n+2}}{n - 2\log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\mathrm{K}}$, и

$$L\left(\Sigma_f\right) \leqslant 2^{2^q} + 4 \cdot 2^{n-q} \leqslant \frac{8 \cdot 2^n}{n - 2\log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right),$$

если $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1

Для функций Шеннона $L^{\mathrm{K}}(n)$ и $L^{\mathrm{C}}(n)$ выполнены соотношения:

$$L^{\mathrm{K}}(n) \lesssim 4 \cdot \frac{2^n}{n}, \qquad L^{\mathrm{C}}(n) \lesssim 8 \cdot \frac{2^n}{n}.$$

§ 4. Нижние мощностные оценки функций Шеннона

Установим теперь ряд нижних оценок для функций Шеннона, введенных в первом параграфе этой части курса. Все эти оценки получены с помощью мощностного метода, предложенного Шенноном и основанного на том, что число ФАЛ от БП $x_1, \ldots, x_n$ не может быть больше числа тех попарно не эквивалентных схем, сложность которых не превосходит значения соответствующей функции Шеннона от аргумента n.

Пусть $\mathcal{U}$ — один из рассмотренных в главе 2 классов схем, Ψ — введенный там функционал сложности, а $\Psi(n)$ — функция Шеннона для класса $\mathcal{U}$ относительно Ψ. Обозначим через $\mathcal{U}(\Psi, n)$ множество тех схем Σ, $\Sigma \in \mathcal{U}$, которые реализуют одну ФАЛ из $P_2(n)$ и для которых $\Psi(\Sigma) \leqslant \Psi$. Следующее «мощностное» равенство вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(n), n)\| = 2^{2^n}. \tag{4.1}$$

Заметим также, что если для некоторого натурального n и действительных $\widehat{\Psi}$, δ, где $0 < \delta < 1$, выполняется неравенство

$$\left\|\mathcal{U}\left(\widehat{\Psi}, n\right)\right\| \leqslant \delta \cdot 2^{2^n}, \quad \text{то } \Psi(f) \geqslant \widehat{\Psi} \tag{4.2}$$

для не менее чем $(1-\delta)\cdot 2^{2^n}$ ФАЛ f из $P_2(n)$.

Верхние оценки величины $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$, установленные в главе 2 для различных классов схем и функционалов сложности, а также соотношения (4.1)–(4.2) служат основой для получения нижних мощностных оценок соответствующих функций Шеннона и сложности почти всех ФАЛ. Напомним, что (см. леммы 4.3, 4.4, 6.2, 6.3 из главы 2) для любых натуральных n и L справедливы неравенства:

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{C}}(L, n)\right\| \leqslant (8(L+n))^{L+1}, \tag{4.3}$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}(L, n)\right\| \leqslant (8n)^{L+1}, \tag{4.4}$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\mathrm{K}}(L, n)\right\| \leqslant (8nL)^{L}, \tag{4.5}$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\pi}(L, n)\right\| \leqslant (12n)^{L}, \tag{4.6}$$

$$\left\|\mathcal{U}^{\Phi}[D, n]\right\| \leqslant (8n)^{2^{D}}. \tag{4.7}$$

Лемма 4.1

Для положительных действительных чисел a, y, q из неравенств

$$a \log q > 1, \quad (ay)^y \geqslant q, \tag{4.8}$$

следует неравенство

$$y \geqslant \frac{\log q}{\log (a \log q)} \left(1 + \frac{\log \log (a \log q)}{\log (ae \log q)}\right), \tag{4.9}$$

где e — основание натуральных логарифмов, а из неравенств $a > 1$, $a^y \geqslant q$ — неравенство

$$y \geqslant \frac{\log q}{\log a}. \tag{4.10}$$

Доказательство

Рассмотрим сначала случай, когда $a = 1$ и $\log q > 1$. В этом случае неравенство (4.9) следует из того, что левая часть (4.8) монотонно возрастает по y, и для

$$\hat{y} = (1+\varepsilon)\,\frac{\log q}{\log\log q},\ \text{где}\ \varepsilon = \frac{\log\log\log q}{\log\left(e\log q\right)},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\hat{y}\log\hat{y} = \\
&= (1+\varepsilon)\,\frac{\log q}{\log\log q}\left(\log\log q - \log\log\log q + \log e\ln(1+\varepsilon)\right) \leqslant \\
&\leqslant \log q\,(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{\log\log\log q}{\log\log q} + \frac{\varepsilon\log e}{\log\log q}\right) = \\
&= \log q\,(1+\varepsilon)\,(1-\varepsilon) = \log q\left(1-\varepsilon^2\right) \leqslant \log q.
\end{aligned}$$

Продолжение доказательства

Заметим, что в случае $a > 0$ неравенство (4.8) эквивалентно неравенству

$$(ay)^{ay} \geqslant q^a,$$

и поэтому неравенство (4.9) получается из неравенства $y \geqslant \hat{y}$ в результате замены y на ay и $\log q$ на $a \log q$, если выполнено условие $a \log q > 1$.

Неравенство (4.10) в случае $a > 1$ получается в результате логарифмирования неравенства $a^y \geqslant q$ и деления обеих частей полученного неравенства на $\log a$.

Лемма доказана. $\square$

Теорема 4.1

Для некоторых последовательностей $\varepsilon_i = \varepsilon_i(n)$, *где* $i = 1, \ldots, 5$ *и* $n = 1, 2, \ldots$, *таких, что* $\varepsilon_i(n) \geqslant 0$ *при* $n \geqslant n_0$ *и* $\varepsilon_i(n)$ *стремится к* 0 *при* n, *стремящемся к бесконечности, для почти всех функций* f *из* $P_2(n)$ *выполняются неравенства*

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant (1 + \varepsilon_1(n)) \frac{2^n}{n}, \tag{4.11}$$

$$L^{\Phi}(f) \geqslant (1 - \varepsilon_2(n)) \frac{2^n}{\log n}, \tag{4.12}$$

$$L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant (1 - \varepsilon_3(n)) \frac{2^n}{n}, \tag{4.13}$$

$$L^{\pi}(f) \geqslant (1 - \varepsilon_4(n)) \frac{2^n}{\log n}, \tag{4.14}$$

$$D(f) \geqslant n - \log\log n - \varepsilon_5(n). \tag{4.15}$$

Доказательство

Занумеруем все функции из $P_2(n)$ по неубыванию значения функционала L их сложности в классе схем $\mathcal{U}$ и обозначим через $\hat{f}$ функцию с номером $\lceil 2^{2^n}/n \rceil$, тогда для $\delta = \frac{1}{n}$ и сложности функции $\hat{f}$ в качестве $\widehat{\Psi}$ будет, очевидно, выполняться годное для применения леммы 4.1 неравенство

$$\left\| \mathcal{U}\left(\widehat{\Psi}, n\right) \right\| \geqslant \delta \cdot 2^{2^n}. \qquad (*)$$

Продолжение доказательства

Неравенства (4.11)–(4.14) выводятся из соответствующего рассматриваемому классу схем $\mathcal{U}$ с функционалом сложности L неравенства (4.3)–(4.6) на основе мощностного неравенства $(*)$, в котором $\delta = 1/n$, с использованием леммы 4.1, где $q = 2^{2^n}/n$, а также

$$
\begin{array}{llll}
1) & a = 8, & y = L^{\mathrm{C}}(\hat{f}) + n, & \text{если } \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\mathrm{C}}; \\
2) & a = 8n, & y = L^{\Phi}(\hat{f}) + 1, & \text{если } \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\Phi}; \\
3) & a = 8n, & y = L^{\mathrm{K}}(\hat{f}), & \text{если } \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\mathrm{K}}; \\
4) & a = 12n, & y = L^{\pi}(\hat{f}), & \text{если } \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\pi}.
\end{array}
$$

Продолжение доказательства

Действительно, подставляя указанные значения в (4.9), получим, что асимптотически не меньше, чем $(1-1/n)$, доля тех ФАЛ f из $P_2(n)$ (а именно, функций, сложность реализации которых не меньше, чем у $\hat{f}$), для которых

$$1)\ L^{\mathrm{C}}(f) \geqslant \frac{2^n - \log n}{n+3-o(1)}\left(1+\frac{\log(n+3-o(1))}{n+\log(8e)-o(1)}\right) - n \geqslant \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1+\frac{\log n - 3 - o(1)}{n}\right); \tag{4.16}$$

$$2)\ L^{\Phi}(f) \geqslant \frac{2^n - \log n}{\log n + 3} - 1 \geqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 - \frac{3+o(1)}{\log n}\right); \tag{4.17}$$

$$3)\ L^{\mathrm{K}}(f) \geqslant \frac{2^n}{n+3+\log n}\left(1+\frac{\log(n+3+\log n)-o(1)}{n+5+\log n}\right) \geqslant \geqslant \frac{2^n}{n}\left(1-\frac{3+o(1)}{n}\right).$$

Продолжение доказательства

Следовательно, неравенство (4.11) ((4.12), (4.13)) будет справедливо для достаточно больших n при $\varepsilon_1(n) = \frac{\log n - 4}{n}$ (соответственно $\varepsilon_2(n) = \frac{4}{\log n}$, $\varepsilon_3(n) = \frac{4}{n}$).
Аналогичным образом устанавливается справедливость (4.14) и (4.15) при $\varepsilon_4(n) = \frac{6}{\log n} = \varepsilon_5(n)$.
Теорема доказана. $\square$

Следствие 1

$$L^{\mathrm{C}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n}, \quad L^{\Phi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}, \quad L^{\mathrm{K}}(n) \gtrsim \frac{2^n}{n},$$
$$L^{\pi}(n) \gtrsim \frac{2^n}{\log n}.$$

Мощностные соображения можно использовать при получении нижних оценок для функций Шеннона, связанных с реализацией ФАЛ из класса $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}(1) \cup \mathfrak{Q}(2) \cup \ldots \cup \mathfrak{Q}(n) \cup \ldots$, где

$$\mathfrak{Q} \subseteq P_2 \text{ и } \mathfrak{Q}(n) = \mathfrak{Q} \cap P_2(n), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $\mathcal{U}$ — один из рассмотренных в главе 2 классов схем, Ψ — введенный там функционал сложности, а $\Psi(\mathfrak{Q}(n))$ — функция Шеннона (для класса схем $\mathcal{U}$ относительно функционала сложности Ψ), связанная с классом ФАЛ $\mathfrak{Q}$, то есть

$$\Psi(\mathfrak{Q}(n)) = \max_{f \in \mathfrak{Q}(n)} \Psi(f).$$

Следующее «мощностное» неравенство обобщает равенство (4.1) и вытекает непосредственно из определений:

$$\|\mathcal{U}(\Psi(\mathcal{Q}(n)), n)\| \geqslant |\mathcal{Q}(n)|. \tag{4.19}$$

Оно позволяет получить нижнюю оценку функции Шеннона $\Psi(\mathcal{Q}(n))$ на основе известной верхней оценки величины $\|\mathcal{U}(\Psi, n)\|$.

Рассмотрим, в частности, нижние мощностные оценки для функций $L^{\mathrm{C}}(\mathfrak{Q}(n))$ и $L^{\mathrm{K}}(\mathfrak{Q}(n))$, то есть функций Шеннона для сложности реализации ФАЛ из класса $\mathfrak{Q}$ схемами из классов $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$ и $\mathcal{U}^{\mathrm{K}}$ соответственно. На основе мощностных соображений (см. (4.19)) аналогично тому, как это было сделано в теореме 4.1 для случая $\mathfrak{Q} = P_2$, доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.2

Для класса ФАЛ $\mathfrak{Q}$ такого, что $n = o\left(\frac{\log|\mathfrak{Q}(n)|}{\log\log|\mathfrak{Q}(n)|}\right)$ $(\log n = o(\log\log|\mathfrak{Q}(n)|))$, выполняются следующие асимптотические неравенства

$$L^{\mathrm{C}}(\mathfrak{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathfrak{Q}(n)|}{\log\log|\mathfrak{Q}(n)|}, \tag{4.20}$$

$$(\text{соответственно} \quad L^{\mathrm{K}}(\mathfrak{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathfrak{Q}(n)|}{\log\log|\mathfrak{Q}(n)|}). \tag{4.21}$$

Пусть, например, класс $\mathcal{Q}$ состоит из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП. Легко видеть, что при этом $|\mathcal{Q}(n)| = 2^{\frac{3}{4}2^n}$, так как $f \in \mathcal{Q}(n)$ тогда и только тогда, когда вторая и третья четверти столбца значений $\widetilde{\alpha}_f$ совпадают. Следовательно, в силу леммы 4.2, отсюда вытекает, что

$$L^{\mathrm{C}}(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}, \qquad L^{\mathrm{K}}(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}. \qquad (4.22)$$

§ 5. Дизъюнктивно-универсальные множества функций. Асимптотически наилучший метод О. Б. Лупанова для синтеза схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Рассмотрим метод синтеза схем из класса $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, который был предложен О. Б. Лупановым и позволил впервые установить асимптотику функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}(n)$. Этот метод, как и метод Шеннона (см. параграф 3 этой части), основан на представлении реализуемой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, в виде (3.4) и построении искомой СФЭ Σ_f, реализующей ФАЛ f, как суперпозиции схем вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$.

При этом схема Σ'' по-прежнему является мультиплексором порядка $(n-q)$ от адресных БП $x''=(x_{q+1},\ldots,x_n)$, а схема Σ' реализует все ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, где $x'=(x_1,\ldots,x_q)$, $\sigma''\in B^{n-q}$, и $f_{\sigma''}(x')=f(x',\sigma'')$. Однако, в отличие от метода Шеннона, каждая ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ берется не с выхода универсального многополюсника от БП x', а реализуется на выходе Σ' как дизъюнкция некоторых ФАЛ, выбранных из специального множества G, $G\subseteq P_2(q)$, реализованного на выходах соответствующей подсхемы схемы Σ'.

Множество ФАЛ G, $G \subseteq P_2(m)$, называется *дизъюнктивно-универсальным множеством (ДУМ) порядка m и ранга p*, если любая ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \ldots \vee g_p,$$

где $g_i \in G$ при всех i, $i = 1, \ldots, p$. Стандартный способ построения таких множеств связан с разбиениями единичного куба.

Пусть $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ — разбиение куба B^m, и пусть для всех i, $i = 1, \ldots, p$, ФАЛ $\psi_i(x_1, \ldots, x_m)$ — характеристическая ФАЛ множества π_i, а $G^{(i)}$ — множество всех тех ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, которые обращаются в 0 вне π_i. Заметим, что множество ФАЛ G вида

$$G = G^{(1)} \cup \ldots \cup G^{(p)}$$

является ДУМ порядка m и ранга p. Действительно, любая ФАЛ g, $g \in P_2(m)$, может быть представлена в виде

$$g = g_1 \vee \ldots \vee g_p, \tag{5.1}$$

где $g_i = \psi_i g$ и, следовательно, $g_i \in G^{(i)}$ для всех i, $i = 1, \ldots, p$.

Заметим также, что мощность множества $G^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$, равна 2^{s_i}, где $s_i = |\pi_i|$, и что множество $G^{(i)} \cap G^{(j)}$ состоит из ФАЛ, тождественно равной 0, если $1 \leqslant i < j \leqslant p$. Следовательно,

$$\lambda = |G| = \sum_{i=1}^{p} \left|G^{(i)}\right| - (p-1) \leqslant \sum_{i=1}^{p} 2^{s_i} \leqslant p2^{s},$$

где

$$s = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} s_i.$$

Указанное ДУМ G будем называть ДУМ, *связанным с разбиением* Π. Компоненты разбиения Π будем при этом называть *полосами* ДУМ G, а ФАЛ $\psi_1 = \chi_{\delta_1}, \ldots, \psi_p = \chi_{\delta_p}$ — его *характеристическими* ФАЛ. Заметим, что характеристические ФАЛ попарно ортогональны, то есть одновременно в 1 не обращаются, и принадлежат G. Заметим также, что представление (5.1) в случае рассматриваемого ДУМ G равносильно представлению:

$$g = \psi_1 g_1 \vee \psi_2 g_2 \vee \cdots \vee \psi_p g_p \qquad (5.2)$$

Будем считать *стандартным* ДУМ порядка m и высоты s, где

$$s \leqslant 2^m, \tag{5.3}$$

ДУМ, связанное с разбиением $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_p)$ куба B^m на последовательные отрезки, для которого номер любого набора из множества π_i меньше номера любого набора из множества π_j, если $i < j$, и выполнены соотношения

$$p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \quad s_1 = s_2 = \cdots = s_{p-1} = s, \qquad s_p = 2^m - (p-1)\, s \leqslant s. \tag{5.4}$$

Таблица значений ФАЛ ДУМ G приведена на рис. 5.1.

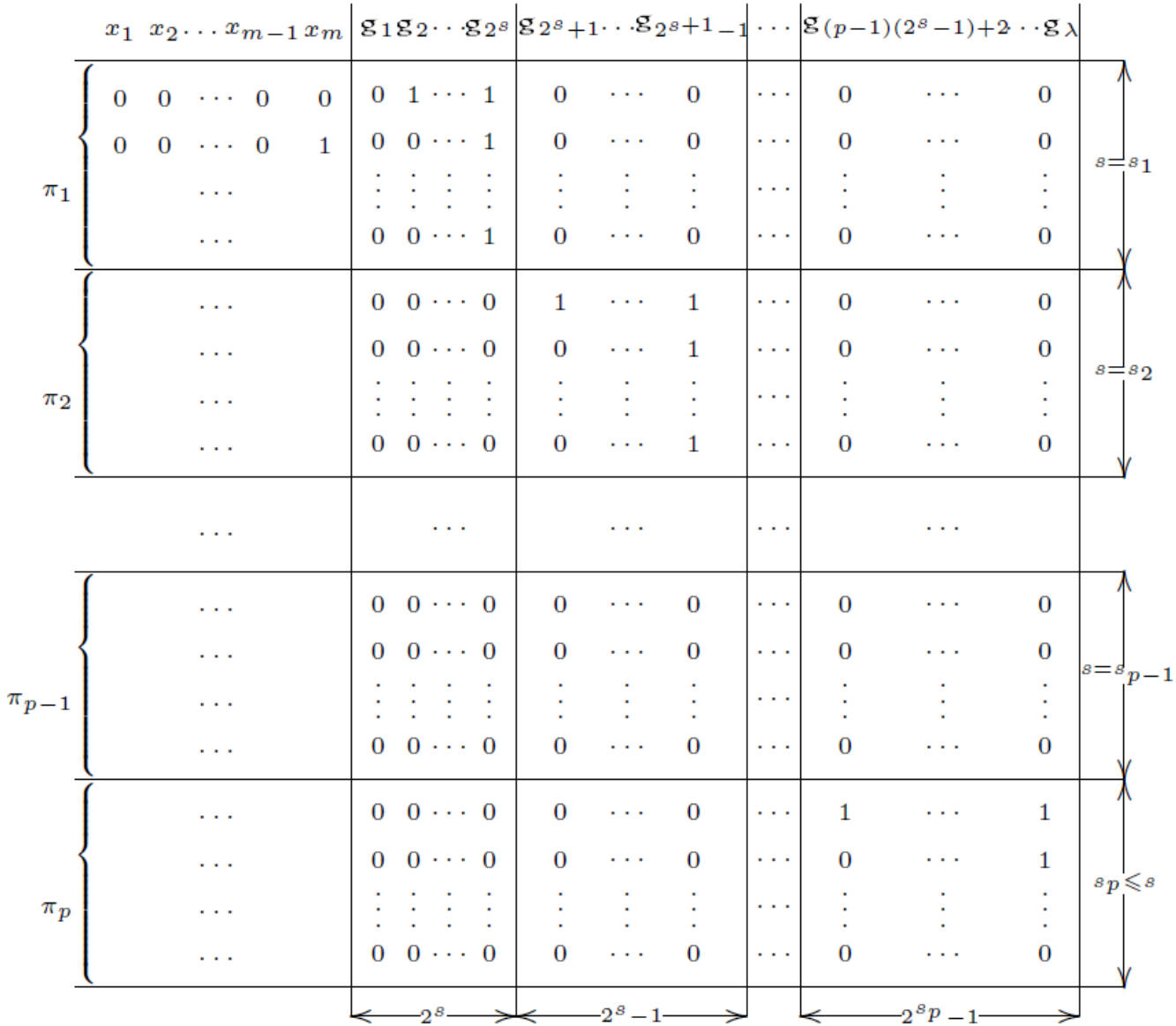


Рис. 5.1: к определению дизъюнктивно-универсального множества

Из проведенных построений и отмеченных выше свойств стандартного ДУМ вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 5.1

Для любых натуральных p, m *и* s, *где* $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$, *существует стандартное ДУМ* G *порядка* m, *которое является ДУМ ранга* p *и в котором:*
$\lambda = |G| \leqslant p2^s$;
имеется система из p *ортогональных характеристических ФАЛ* $\psi_1, \ldots, \psi_p$ *ДУМ* G, *обладающих тем свойством, что для любой ФАЛ* g, $g \in P_2(m)$, *и некоторых ФАЛ* $g_1, \ldots, g_p$ *из* G *справедливо не только представление* (5.1), *но и представление* (5.2).

Теорема 5.1

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее СФЭ Σ_f, $\Sigma_f \in \mathcal{U}^{\mathrm{C}}$, такая, что

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{5\log n + O(1)}{n}\right). \qquad (5.5)$$

Доказательство

Пусть $x'=(x_1,\ldots,x_q)$, $x''=(x_{q+1},\ldots,x_n)$ и $f_{\sigma''}(x') = f(x',\sigma'')$ для всех σ'' из B^{n-q}. Пусть, далее, Σ'' — мультиплексор порядка $(n-q)$ от адресных БП x'' и информационных БП $y=(y_0,\ldots,y_{2^{n-q}-1})$, который построен в соответствии с леммой 2.3, представляет собой формулу $\mathcal{F}_{n-q}$ и реализует мультиплексорную ФАЛ $\mu_{n-q}(x'',y)$.

Продолжение доказательства

Пусть s — некоторый параметр, удовлетворяющий (5.3), а G — стандартное ДУМ порядка $m = q$ и высоты s, удовлетворяющее требованиям леммы 5.1. Обозначим через Σ_G СФЭ, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$ и представляет собой объединение схем, построенных для каждой из них в соответствии с леммой 1.2. Заметим, что, в силу леммы 2.3, (1.3) и леммы 5.1, выполнены неравенства

$$\begin{aligned} L\left(\Sigma''\right) &\leqslant 4 \cdot 2^{n-q}, \\ L\left(\Sigma_G\right) &\leqslant 3p2^{s+q}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Продолжение доказательства

Схема Σ' содержит СФЭ Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$, где $\sigma'' \in B^{n-q}$, на одном из своих выходов как ФАЛ $g(x')$ вида (5.1) с помощью СФЭ из $(p-1)$ ФЭ $\vee$, входы которой присоединены к соответствующим выходам Σ_G.

Продолжение доказательства

Искомая СФЭ Σ_f имеет вид $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$ и реализует ФАЛ f в соответствии с разложением (3.4). Для нее, в силу (5.6), будут выполняться неравенства

$$L(\Sigma_f) \leqslant 2^{n-q}(p-1) + L(\Sigma'') + L(\Sigma_G) \leqslant \\ \leqslant 2^{n-q}(p-1) + 4 \cdot 2^{n-q} + 3p2^{s+q},$$

из которых, выбрав значения параметров

$$s = \lceil n - 5\log n \rceil,\ m = q = \lceil 2\log n \rceil,$$

удовлетворяющие (5.3), в соответствии с леммой 5.1 получим

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n - 5\log n} + O\left(\frac{2^n}{n^2}\right) = \frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{5\log n + O(1)}{n}\right).$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие

Из (5.5) *с учётом следствия из теоремы 4.1 вытекает, что*

$$L^{\mathrm{C}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Отметим, в заключение, что в соответствии с (5.5) и теоремой 4.1 сложность $L^{\mathrm{C}}(f)$ для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, асимптотически равна функции Шеннона $L^{\mathrm{C}}(n)$, то есть сложности самой сложной ФАЛ из $P_2(n)$. Тем самым, в отличие от класса ДНФ (см. §7 главы 1), в классе схем $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}$ имеет место т. н. эффект Шеннона — асимптотическое равенство сложности почти всех ФАЛ и сложности самой сложной ФАЛ от заданного числа БП, стремящегося к бесконечности.

Описанный выше асимптотически наилучший метод синтеза схем ориентирован, вообще говоря, на произвольную или самую «сложную» ФАЛ. Тем не менее, во многих случаях он служит основой асимптотически наилучшего метода синтеза СФЭ для ФАЛ из заданного специального класса $\mathfrak{Q}$ и позволяет установить для этого класса «стандартную» (см. (4.20)) асимптотику вида

$$L^{\mathrm{C}}(\mathfrak{Q}(n)) \sim \frac{\log\log|\mathfrak{Q}(n)|}{\log|\mathfrak{Q}(n)|}. \tag{5.7}$$

Заметим, что асимптотика (5.7) устанавливается, как правило, путем сведения задачи синтеза СФЭ для любой ФАЛ из $Q(n)$ к задаче синтеза СФЭ для системы из одной или нескольких произвольных ФАЛ от меньшего числа БП. При этом требуется, чтобы двоичный логарифм числа тех систем ФАЛ, к реализации которых сводится реализация ФАЛ из $Q(n)$, был асимптотически равен $\log |Q(n)|$, а сложность вспомогательных ФАЛ, обеспечивающих данное сведение, была бы существенно меньше правой части (5.7). Аналогичным образом обстоит дело с классом КС.

Возьмем в качестве примера введенный в §4 класс ФАЛ $\mathfrak{Q}$, состоящий из всех ФАЛ, симметричных по первым двум БП, и докажем, что

$$L^{\mathrm{C}}\left(\mathfrak{Q}\left(n\right)\right) \lesssim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n},$$

то есть, с учетом (4.22), установим для него асимптотику (5.7) вида

$$L^{\mathrm{C}}\left(\mathfrak{Q}\left(n\right)\right) \sim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}.$$

Действительно, разлагая ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathcal{Q}(n)$ по БП x_1, x_2, получим

$$f(x_1, x_2, x') = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)\in B^2} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} f_{\sigma_1,\sigma_2}(x'), \qquad (5.8)$$

где $x' = (x_3, \ldots, x_n)$ и $f_{\sigma_1,\sigma_2}(x') = f_{\sigma_1,\sigma_2}(\sigma_1, \sigma_2, x')$, причем $f_{01} = f_{10}$ в силу симметричности ФАЛ f по БП x_1, x_2. Искомая СФЭ Σ_f реализует ФАЛ f в соответствии с (5.8) и имеет вид $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — мультиплексорная СФЭ порядка 2 от адресных БП x_1, x_2, а СФЭ Σ' от БП x' реализует асимптотически наилучшим способом ФАЛ f_{00}, $f_{01} = f_{10}$ и f_{11} от БП x'. Легко видеть, что сложность построенной схемы Σ_f асимптотически не больше, чем $\frac{3}{4} \cdot \frac{2^n}{n}$.

§ 6. Регулярные разбиения единичного куба и моделирование функций переменными. Асимптотически наилучший метод синтеза формул в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$

Множество δ, $\delta \subseteq B^q$, называется *m-регулярным* множеством наборов куба B^q, если $m < q$, $|\delta| = 2^m$ и все префиксы[1] длины m наборов из δ различны. Заметим, что m-регулярному множеству δ, $\delta \subseteq B^q$, можно взаимно однозначно сопоставить систему ФАЛ $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{q-m})$ из $P_2^{q-m}(m)$ так, что набор $\alpha = (\beta, \gamma)$, где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, принадлежит δ тогда и только тогда, когда $\psi(\beta) = \gamma$. Заметим также, что любая ФАЛ g, $g \in P_2(q)$, совпадает на m-регулярном множестве наборов δ, $\delta \subseteq B^q$, с некоторой ФАЛ из $P_2(m)$, если рассматривать $P_2(m)$ как множество всех ФАЛ из $P_2(q)$ с несущественными БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$. При этом любая ФАЛ из связанной с δ системы функций совпадает на δ с соответствующей БП куба B^q.

[1] Для слова (набора) α вида $\alpha = \beta\gamma$ слово β (γ) считается его *префиксом* (соответственно *суффиксом*).

Для наборов $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ через $\beta \oplus \alpha$ будем обозначать набор вида $(\beta_1 \oplus \alpha_1, \ldots, \beta_q \oplus \alpha_q)$. Для множества δ, $\delta \subseteq B^q$, и набора α, $\alpha \in B^q$, определим множество $\delta \oplus \alpha$ как множество различных наборов вида $\beta \oplus \alpha$, где $\beta \in \delta$, то есть множество, получающееся из множества δ сдвигом (параллельным переносом) на набор α. Заметим, что для m-регулярного множества δ, $\delta \subseteq B^q$, и любого набора α, $\alpha \in B^q$, множество $\delta \oplus \alpha$ также является m-регулярным. Если при этом $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$, то есть

$$\alpha = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, \gamma),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{q-m})$ и $\nu(\gamma) = \nu(\alpha)$, а множество наборов δ соответствует системе ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_{q-m})$, то множество наборов $\delta \oplus \alpha$ будет соответствовать системе ФАЛ $(g_1 \oplus \gamma_1, \ldots, g_{q-m} \oplus \gamma_{q-m})$, получающейся из системы g инвертированием некоторых ФАЛ.

Всякое разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ булева куба B^q на m-регулярные множества $\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}}$ называется *m-регулярным разбиением* куба B^q.

Лемма 6.1

Для любых натуральных m, λ и $q = m + \lambda$ и для любой системы ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_\lambda)$ из $P_2^\lambda(m)$ существует m-регулярное разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q такое, что любая ФАЛ g_i на любой компоненте δ_j совпадает либо с одной из БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$, либо с её отрицанием.

Доказательство

Пусть $\delta = \delta_1$ — m-регулярное множество, соответствующее системе ФАЛ $g = (g_1, \ldots, g_\lambda)$, и пусть $\delta_i = \delta_1 \oplus \alpha$, где $\nu(\alpha) = i - 1$, для всех i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$. Из построения системы множеств $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ следует, что каждое из них обладает требуемым свойствами, связанными с моделированием ФАЛ из g с помощью БП.

Продолжение доказательства

Покажем теперь, что Δ — покрытие куба B^q. Для этого возьмем произвольный набор из B^q вида (β, γ), где $\beta \in B^m$ и $\gamma \in B^{q-m}$, а по нему найдем в множестве δ набор вида $(\beta, \widehat{\gamma})$, который имеется в δ в силу m-регулярности этого множества. Следовательно,

$$(\beta, \gamma) = (\beta, \widehat{\gamma}) \oplus (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, \widehat{\gamma} \oplus \gamma) = (\beta, \widehat{\gamma}) \oplus \alpha,$$

где $\nu(\alpha) < 2^{q-m}$. Таким образом, система Δ образует покрытие куба B^q.

Продолжение доказательства

С другой стороны, из m-регулярности δ следует m-регулярность любого из множеств δ_i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{2^{q-m}} |\delta_i| = 2^m 2^{q-m} = 2^q.$$

Следовательно, система Δ образует разбиение куба B^q. Лемма доказана. $\square$

Применим технику моделирования ФАЛ переменными для синтеза формул в стандартном базисе.

Теорема 6.1

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, *в* $\mathcal{U}^{\Phi}$ *существует реализующая ее формула* $\mathcal{F}_f$, *для которой*

$$L(\mathcal{F}_f) \leqslant \frac{2^n}{\log n}\left(1 + \frac{2\log\log n + O(1)}{\log n}\right). \qquad (6.1)$$

Доказательство

Пусть натуральные параметры m, s и p удовлетворяют соотношениям

$$s \leqslant 2^m, \qquad p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \qquad m + p \cdot 2^s \leqslant n,$$

а G — стандартное ДУМ порядка m и высоты s, для которого $|G| = \lambda \leqslant p \cdot 2^s$ (см. §5). Пусть, далее, $q = m + \lambda$ и, следовательно, $q \leqslant n$, а $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^\lambda})$ — m-регулярное разбиение куба B^q, полученное по лемме 6.1 для системы ФАЛ $\vec{G}$.

Продолжение доказательства

Положим $x' = (x_1, \ldots, x_q)$ и заметим, что произвольная ФАЛ h, $h \in P_2(q)$, на любой компоненте δ_i, $i \in [1, 2^\lambda]$, в силу ее m-регулярности совпадает с некоторой ФАЛ $\hat{h}(x_1, \ldots, x_m)$. При этом ФАЛ $\hat{h}$ равна дизъюнкции p ФАЛ из ДУМ G, каждая из которых в силу леммы 6.1 совпадает на δ_i с буквой одной из БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$. Следовательно, ФАЛ h совпадает на δ_i с ЭД ранга p от указанных БП.

Продолжение доказательства

Для ФАЛ $f(x)$ из $P_2(n)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$ рассмотрим ее представление в виде

$$f(x) =$$

$$= \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1},\ldots,\sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \left(\bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x')\, f_{\sigma''}(x') \right) =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(x') \left(\bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1},\ldots,\sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} J_{\sigma'',i}(x') \right), \quad (6.2)$$

где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ множества δ_i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, а элементарная дизъюнкция (ЭД) $J_{\sigma'',i}(x')$ ранга p от БП $x_{m+1}, \ldots, x_q$, совпадает на δ_i с ФАЛ $f_{\sigma''}(x') = f(x', \sigma'')$.

Продолжение доказательства

Построим для ФАЛ f на основе (6.2) формулу $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ с поднятыми отрицаниями, которая имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathfrak{A}_i(x')\mathcal{F}_{n-q}\left(x'', J_{\widetilde{0},i}, \ldots, J_{\widetilde{1},i}\right),$$

где $\mathcal{F}_{n-q}\left(x'', y_0, \ldots, y_{2^{n-q}-1}\right)$ — бесповторная по информационным БП формула из леммы 2.3, реализующая ФАЛ μ_{n-q}, а $\mathfrak{A}_i$, $i \in [1, 2^\lambda]$, — совершенная ДНФ ФАЛ χ_i.

Продолжение доказательства

Пусть, далее, формула $\mathcal{F}_f$ получается из формулы $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ оптимизацией ЭД по числу отрицаний, то есть заменой каждой ЭД $J_{\sigma'',i}$ вида $x_{j_1} \vee \cdots \vee x_{j_t} \vee \bar{x}_{j_{t+1}} \vee \cdots \vee \bar{x}_{j_p}$, где $t \leqslant p$, формулой $\hat{J}_{\sigma'',i}$ вида $x_{j_1} \vee \cdots \vee x_{j_t} \vee \overline{(x_{j_{t+1}} \cdots x_{j_p})}$. Заметим, что число ФЭ $\neg$ во всех формулах $\mathfrak{A}_i$, $i \in [1, 2^\lambda]$, равно половине их суммарного ранга, что в каждой формуле вида $\hat{J}_{\sigma'',i}$ имеется один ФЭ $\neg$, и напомним (см. лемму 2.3), что $R(\mathcal{F}_{n-q}) \leqslant 3 \cdot 2^{n-q}$ и $L_\neg(\mathcal{F}_{n-q}) \leqslant 2^{n-q}$.

Продолжение доказательства

Следовательно, в силу леммы 2.1 главы 2,

$$L_{\&,\vee}(\mathcal{F}_f) \leqslant 2^{q-m}\left(q \cdot 2^m + (p-1)2^{n-q} + 3 \cdot 2^{n-q}\right), \qquad (6.3)$$

$$L_{\neg}(\mathcal{F}_f) \leqslant q \cdot 2^{q-1} + 2^{n-m} + 2^{n-m}. \qquad (6.4)$$

Выбирая значения параметров m и s так, что

$$m = \lfloor 3\log\log n \rfloor - 1, \qquad s = \lfloor \log n - 2\log\log n \rfloor - 1,$$

и подставляя эти значения в (6.3), (6.4), получим:

$$p \cdot 2^{n-m} = \lceil 2^m/s \rceil \cdot 2^{n-m},\ 2^{n-m} = O\left(\frac{2^n}{\log^3 n}\right),$$

Продолжение доказательства

$$q\cdot 2^q \leqslant (m+p2^s)\cdot 2^{m+p2^s} \leqslant \left(3\log\log n + \frac{2^s 2^m}{s}\right)\cdot 2^{3\log\log n+\frac{2^s 2^m}{s}} =$$

$$= O\left(\frac{n}{\log^2 n}\cdot\frac{\log^3 n}{\log n}\cdot 2^{3\log\log n+\frac{2^s 2^m}{s}}\right) =$$

$$= O\left(n\cdot 2^{3\log\log n+\frac{n}{2}}\right) = o\left(\frac{2^n}{\log^2 n}\right).$$

Отсюда следует неравенство

$$L\left(\mathcal{F}_f\right) \leqslant \frac{2^n}{\log n - 2\log\log n} + O\left(\frac{2^n}{\log^2 n}\right),$$

из которого для сложности формулы $\mathcal{F}_f$ следует оценка (6.1). Теорема доказана. $\square$

Следствие

Из (6.1) *с учетом нижних оценок следствия из теоремы 4.1 вытекает, что*

$$L^{\Phi}(n) \sim \frac{2^n}{\log n}.$$

Замечание

Если при построении формул $\mathcal{F}_f$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_f$ вместо подформулы $\mathcal{F}_{n-q}\left(x'', y_0, \ldots, y_{2^{n-q}-1}\right)$ из леммы 2.3 взять эквивалентную, но более оптимальную по альтернированию формулу от тех же БП (что выполнимо), а к полученной в результате формуле применить оптимизацию по глубине (теорема 2.1 главы 2), то построенная указанным способом для ФАЛ f формула $\check{\mathcal{F}}_f$ будет помимо (6.1) удовлетворять также неравенству

$$D(\check{\mathcal{F}}_f) \leqslant n - \log\log n + O(1),$$

из которого с учетом нижних оценок следствия теоремы 4.1, вытекает, что

$$D(n) = n - \log\log n \pm O(1).$$

§ 7. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем

Заметим сначала, что асимптотически наилучший метод синтеза СФЭ из §5 без существенных изменений переносится на класс контактно-вентильных схем (КВС), в которых наряду с контактами можно использовать «вентили», то есть ориентированные ребра, проводящие только в направлении своей ориентации. Действительно, для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, реализующая ее $(1,1)$-КВС $\widetilde{\Sigma}_f$ может быть получена на основе разложения (3.4) так же, как и СФЭ Σ_f из теоремы 5.1. Она является результатом корректной суперпозиции (см. §9 главы 2) вида $\widetilde{\Sigma}_f = \Sigma''(\Sigma')$, где Σ'' — $(2^{n-q},1)$-КД от БП x'', а $(1,2^{n-q})$-КВС Σ' реализует систему всех ФАЛ вида $f_{\sigma''}(x')$, $\sigma'' \in B^{n-q}$.

При этом схема Σ' по-прежнему содержит в качестве подсхемы $(1,\lambda)$-КС Σ_G, реализующую систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$ на основе леммы 1.2, и реализует каждую ФАЛ $g(x')$ типа $f_{\sigma''}(x')$ на основе ее представления (5.1) в виде дизъюнкции $g = g_1 \vee \cdots \vee g_p$ с помощью присоединения входов вентильной звезды порядка p к соответствующим выходам КС Σ_G (см. рис. 7.1а), которое является корректной суперпозицией. Сложность построенной КВС $\widetilde{\Sigma}_f$ при тех же значениях параметров, что и в теореме 5.1, будет удовлетворять неравенству (5.5).

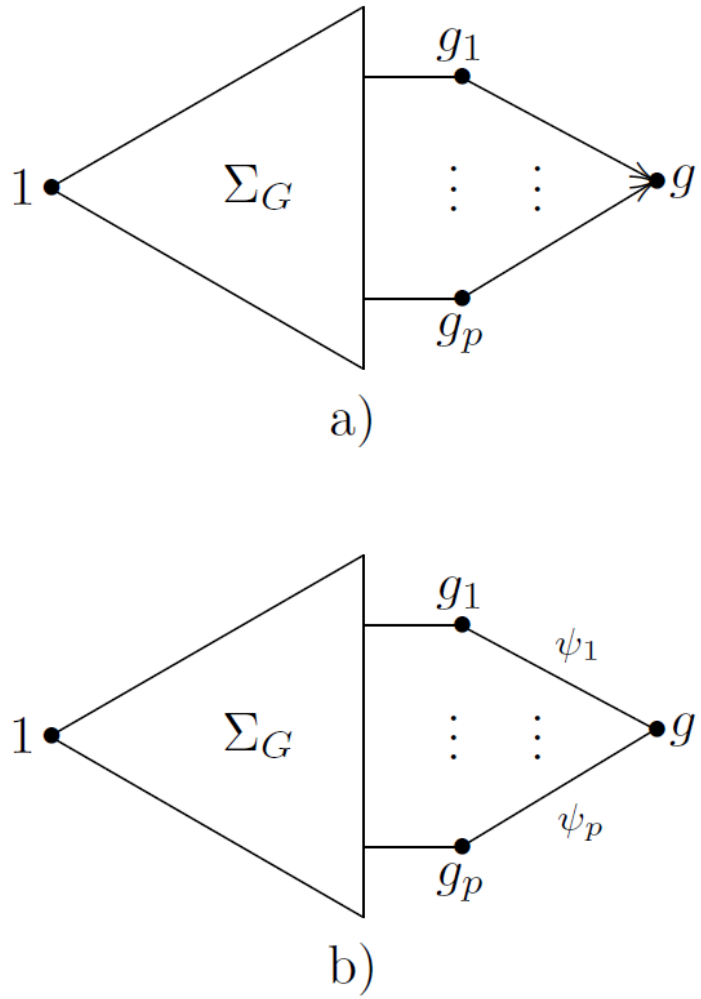


Рис. 7.1: Корректная реализация дизъюнкции ФАЛ $g_1, \ldots, g_p$ в классах КВС и ИКС

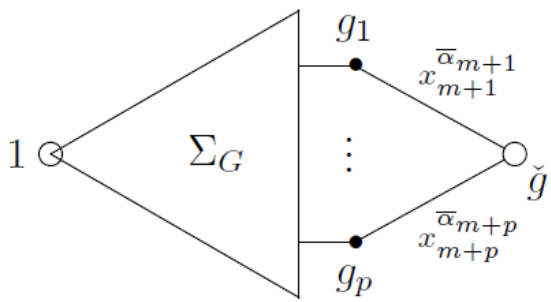
Напомним, что в силу специфики стандартного ДУМ G вместо представления (5.1) для ФАЛ g можно использовать эквивалентное (5.1) представление (5.2) вида

$$g = \psi_1 \cdot g_1 \vee \cdots \vee \psi_p \cdot g_p \tag{7.1}$$

и на его основе реализовать ФАЛ g с помощью корректной суперпозиции т.н. итеративно-контактных схем, показанной на рис. 7.1b, где ФАЛ $\psi_1, \ldots, \psi_p$ управляют проводимостью соответствующих контактов. Асимптотически наилучший метод синтеза КС связан с «моделированием» этой суперпозиции и представления (7.1) на компонентах подходящего m-регулярного разбиения куба B^{m+p}.

	x_1	$\cdots$	x_{m-1}	x_m	ψ_1	ψ_2	$\cdots$	ψ_p	
π_1	0	$\cdots$	0	0	1	0		0	$\check{\delta}$
	0	$\cdots$	0	1	1	0		0	
		$\cdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
		$\cdots$			1	0		0	
π_2		$\cdots$			0	1		0	
		$\cdots$			0	1		0	
		$\cdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
		$\cdots$			0	1		0	
		$\cdots$			$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
π_p		$\cdots$			0	0		1	
		$\cdots$			0	0		1	
		$\cdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
	1	$\cdots$	1	1	0	0		1	

a)



b)

Рис. 7.2: m-регулярное множество $\check{\delta}$ и связанная с ним суперпозиция КС

Пусть $\check{\delta}$ — m-регулярное множество наборов куба B^{m+p}, соответствующее системе ФАЛ $\overrightarrow{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_p)$ (см. рис. 7.2а), а $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^p})$ — построенное для нее по лемме 6.1 разбиение куба B^{m+p}. Заметим, что любая ФАЛ g, $g \in P_2(m+p)$, на любой компоненте этого разбиения вида $\check{\delta} \oplus \alpha$, где

$$\alpha = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+p}),$$

совпадает с ФАЛ

$$\check{g} = x_{m+1}^{\overline{\alpha}_{m+1}} \cdot g_1 \vee \ldots \vee x_{m+p}^{\overline{\alpha}_{m+p}} \cdot g_p, \qquad (7.2)$$

где $g_i = g\psi_i \in G^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$.

При этом ФАЛ $\check{g}$ может быть реализована в результате операции присоединения звезды из контактов вида $x_{m+1}^{\overline{\alpha}_{m+1}}, \ldots, x_{m+p}^{\overline{\alpha}_{m+p}}$ к выходам $(1, \lambda)$-КС Σ_G, реализующей систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$, так, как это показано на рис. 7.2b. Заметим также, что указанная операция суперпозиции является корректной на множестве наборов $\check{\delta} \oplus \alpha$ в силу разделительности присоединяемой $(p, 1)$-КС на этом множестве.

Теорема 7.1

Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, существует реализующая ее КС Σ_f такая, что

$$L(\Sigma_f) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \tag{7.3}$$

Доказательство

Пусть $q = m + p$, а $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^p})$ — описанное выше разбиение куба B^q, с помощью которого ФАЛ f можно представить в виде

$$f(x', x'') = \bigvee_{i=1}^{2^p} \chi_i(x') \bigvee_{\sigma''=(\sigma_{q+1},\ldots,\sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n} \check{g}_{\sigma'',i}(x'), \tag{7.4}$$

где χ_i — характеристическая ФАЛ δ_i, а в качестве ФАЛ $f_{\sigma'',i}$ при всех $\sigma'', \sigma'' \in B^{n-q}$, и i, $i \in [1, 2^p]$, берется ФАЛ $\check{g}_{\sigma'',i}$ вида (7.2), совпадающая с ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ на компоненте $\delta_i = \check{\delta} \oplus \alpha$.

Продолжение доказательства

Пусть Σ_G — $(1, \lambda)$-КС, которая реализует систему ФАЛ $\overrightarrow{G}$ по их совершенным ДНФ на основе контактного дерева (см. лемму 1.2 и оценку (1.2)). Для каждого i, $i = 1, \ldots, 2^p$, построим $(1, 2^{n-q})$-КС Σ'_i (см. рис. 7.3а), которая содержит КС Σ_G в качестве подсхемы и реализует каждую ФАЛ $\check{g}_{\sigma'',i}$ вида (7.2) с помощью корректной на множестве наборов δ_i суперпозиции, показанной на рисунке 7.2b. Пусть, далее, $(1, 2^{n-m})$-КС Σ' получается в результате отождествления входов у построенных выше КС Σ'_i, $i \in [1, 2^p]$, и реализует систему из всех ФАЛ вида $\check{g}_{\sigma'',i}$, где $\sigma'' \in B^{n-q}$, $i \in [1, 2^p]$.

Продолжение доказательства

Заметим, что при этом выполняются неравенства

$$\begin{aligned} L\left(\Sigma_G\right) &\leqslant \lambda 2^{m+1}, \\ L\left(\Sigma_i'\right) &\leqslant L\left(\Sigma_G\right) + p2^{n-q}, \\ L\left(\Sigma'\right) &\leqslant p2^{n-m} + \lambda 2^{q+1}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Построим, наконец, разделительную по входам $(2^{n-m}, 1)$-КС Σ'', которая реализует столбец из всех ФАЛ вида $\mathfrak{X}_i\left(x'\right) \cdot x_{q+1}^{\sigma_{q+1}} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $i \in [1, 2^p]$ и $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n) \in B^{n-q}$.

Продолжение доказательства

Эта КС получается в результате объединения 2^p схем типа $(2^{n-q}, 1)$-КД от БП x'', к выходам которых присоединены входы $(2^p, 1)$-КС, реализующей столбец из ФАЛ χ_i, $i \in [1, 2^p]$, и получающейся из $(2^q, 1)$-КД от БП x' в результате соответствующего отождествления входов (см. рис. 7.3b). Легко видеть, что при этом

$$L\left(\Sigma''\right) \leqslant 2^{q+1} + 2^{n-m+1}. \tag{7.6}$$

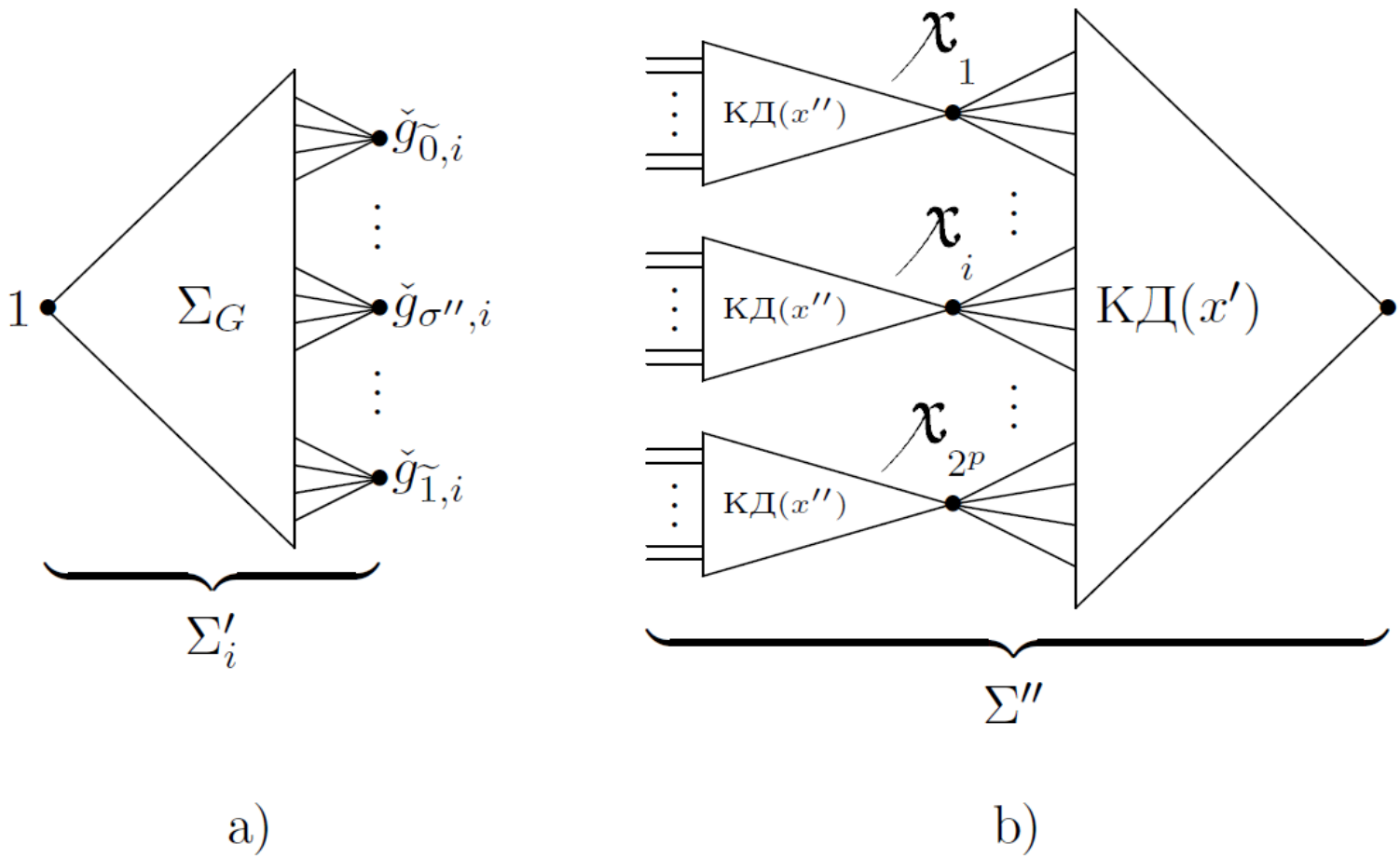


Рис. 7.3: к доказательству теоремы 7.1

Продолжение доказательства

Искомая КС Σ_f является результатом корректной стыковки вида $\Sigma_f = \Sigma''(\Sigma')$, полученной в результате присоединения входов КС Σ'' к выходам КС Σ' в соответствии с представлением (7.4), сложность которой, в силу (7.5)–(7.6), удовлетворяет неравенству

$$L(\Sigma_f) \leqslant (p+2)2^{n-m} + (\lambda+1)2^{q+1}.$$

Продолжение доказательства

Из этого неравенства для $m = \left\lfloor \frac{3}{2} \log n \right\rfloor$ и $s = \lceil n - 2\sqrt{n} \rceil$, при которых для всех n, начиная с некоторого n_0, выполнены условия $s \leqslant 2^m$, $p = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil$ и $q = m + p \leqslant n$, вытекает неравенство (7.3) для сложности Σ_f, так как для всех n, начиная с некоторого n_1, верно:

$$(p+2)2^{n-m} \leqslant \frac{2^n}{s} + 3 \cdot 2^{n-m} = \frac{2^n}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

$$(\lambda+1)2^{q+1} \leqslant p2^s \cdot 2^{m+p+2} \leqslant \frac{2^{2m+s+p+3}}{s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{256}{s} \cdot 2^{n-\sqrt{n}+3\log n} = o\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right).$$

Теорема доказана. □

Следствие

Из (7.3) *с учетом нижней оценки* (4.13) *вытекает, что*

$$L^{\mathrm{K}}(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

Замечание

Построенную КС Σ_f можно разбить на не более, чем

$$\lambda p \cdot 2^p + 2^{n-m+1} + (\lambda + 1)2^{q+1} = O\left(\frac{2^n}{n\sqrt{n}}\right)$$

«звезд», каждая из которых состоит из контактов одного и того же типа. Для этого достаточно контакты всех звезд, показанных на рис. 7.2b, перераспределить в звезды из однотипных контактов, «центрами» которых являются выходы подсхем Σ_G схем Σ'_i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, а любой из остальных контактов КС Σ_f считать отдельной звездой.

§ 8. Синтез схем для контактных дешифраторов

Лемма 8.1

Для $n = 1, 2, 3, \ldots$ *выполняются неравенства*

$$L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \leqslant 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right), \tag{8.1}$$

$$L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \leqslant 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right). \tag{8.2}$$

Доказательство

Выберем параметры m, q и λ так, что

$$\lambda = 2^m, \quad q = m + \lambda \quad \text{и} \quad q \leqslant n,$$

а затем рассмотрим m-регулярное множество наборов δ_1 куба B^q от БП $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, связанное с системой ФАЛ $\overrightarrow{Q}_m(x_1, \ldots, x_m)$, которая состоит из всех ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \cdots x_m^{\sigma_m}$, где $\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) = j - 1$, $j \in [1, \lambda]$.

Продолжение доказательства

Построим для этой системы по лемме 6.1 разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q и заметим, что любая ЭК $K(x') = x_1^{\sigma_1} \cdots x_q^{\sigma_q}$, где $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_q) \in \delta_i$, совпадает на множестве δ_i с одной из ЭК системы $\overrightarrow{Q}_m$, то есть совпадет на нем с буквой $x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}}$, где $m+1 \leqslant j_{\sigma'} \leqslant q$, $\alpha_{\sigma'} \in B$. Заметим, что в силу указанных выше свойств разбиения Δ любая ЭК $K = x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_q) \in \delta_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^\lambda$, может быть представлена в виде

$$K = \chi_i(x') \cdot x_{j_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}} \cdot K_{\sigma''}(x''), \tag{8.3}$$

где $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$, $\sigma'' = (\sigma_{q+1}, \ldots, \sigma_n)$.

Продолжение доказательства

Пусть, далее, $(1, 2^\lambda)$-КС Σ' реализует строку из ФАЛ $\overrightarrow{\chi} = (\chi_1, \ldots, \chi_{2^\lambda})$, где $\chi_i(x')$ — характеристическая ФАЛ множества δ_i, $i \in \left[1, 2^\lambda\right]$, и получается в результате отождествления входов у схем $\Sigma'_1, \ldots, \Sigma'_{2^\lambda}$, где π-схема Σ'_i, $i \in [1, 2^\lambda]$, построена по лемме 1.2 для ФАЛ χ_i, является ККС сложности не более чем $q2^m$, причем выходом Σ'_i считается корень соответствующего КД (см. рис. 8.1). Искомая $(1, 2^n)$-КС $\Sigma_n^{(\&)}$ реализует каждую ЭК из $\overrightarrow{Q}_m$ в соответствии с (8.3), имеет вид, показанный на рис. 8.1, и является ККС.

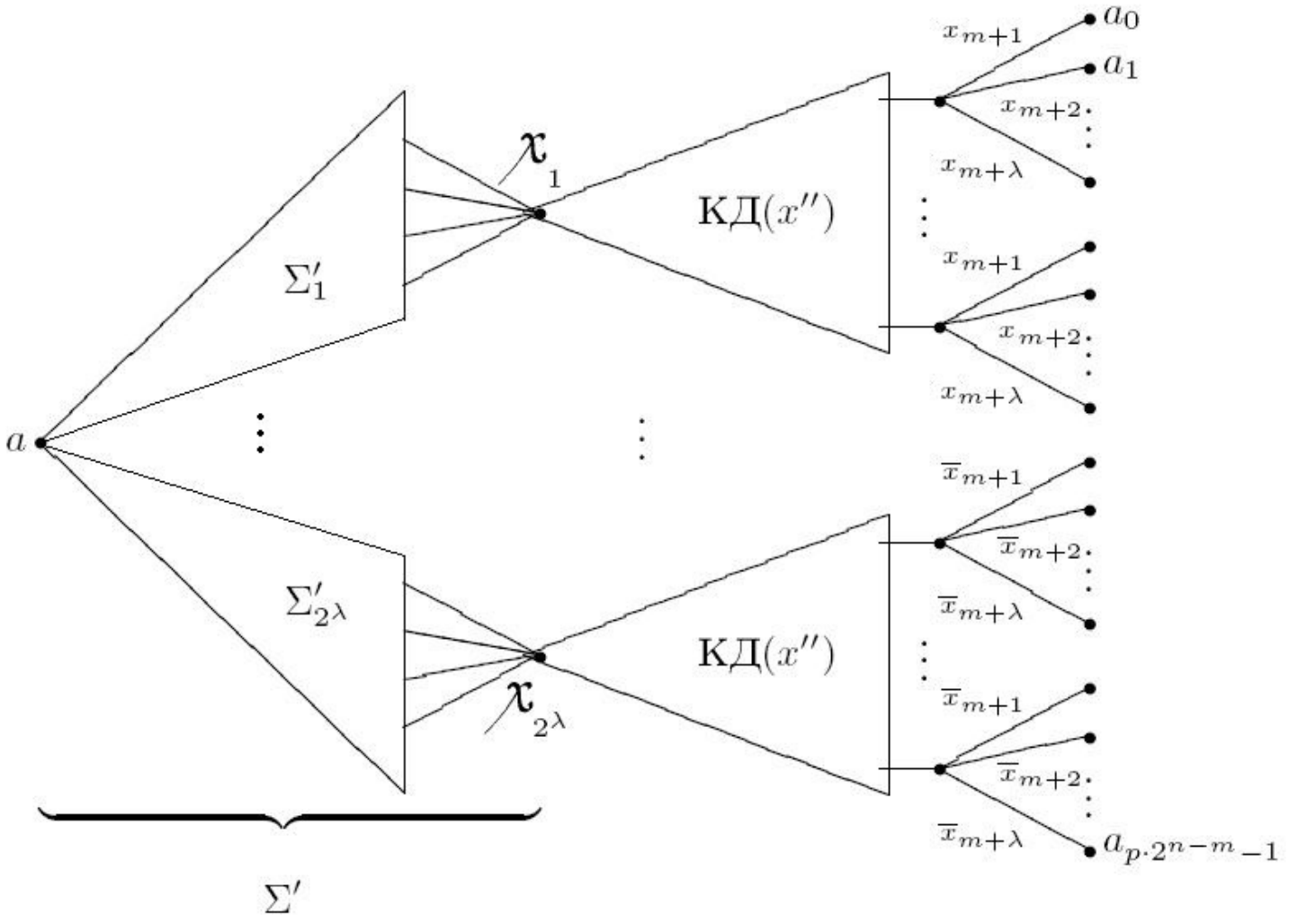


Рис. 8.1: к доказательству леммы 8.1

Продолжение доказательства

Полагая

$$m = \lceil \log n \rceil - 2,$$

получим, что

$$\lambda = 2^m \leqslant \frac{n}{2}, \quad q = m + \lambda \leqslant n.$$

При этом сложность построенной $(1, 2^n)$-КС $\Sigma_n^{(\&)}$, являющейся контактным дешифратором порядка n, удовлетворяет неравенствам:

$$L\left(\Sigma_n^{(\&)}\right) \leqslant \lambda 2^{n-m} + 2^{n-m+1} + q2^q \leqslant 2^n + O\left(\frac{2^n}{n}\right),$$

из которых вытекает неравенство 8.1.

Продолжение доказательства

Искомая $(1, 2^n)$-КС $\Sigma_n^{(\vee)}$, являющаяся дизъюнктивным контактным дешифратором порядка n, сложность которого удовлетворяет оценке (8.2), получается в результате перехода от ККС $\Sigma_n^{(\&)}$ к инверсной ККС в соответствии с леммой 10.1 главы 2.
Лемма доказана.

Оценки леммы 8.1 и следствия из лемм 2.2 и 2.5 дают следующие асимптотические равенства.

Следствие

$$L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{Q}_n\right) \sim 2^n, \qquad L^{\mathrm{K}}\left(\overrightarrow{J}_n\right) \sim 2^{n+1}.$$