# «Основы кибернетики (3-й поток)»

Лектор —
доцент, д.ф.-м.н. Д. С. Романов

Информационная поддержка курса:
`https://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток)`

# Семинар 1. Представление функций алгебры логики (ФАЛ) с помощью дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), импликанты и простые импликанты ФАЛ. Сокращённая ДНФ и методы её построения.

# 1. Единичный куб и табличные способы задания ФАЛ.

Пусть $B = \{0, 1\}$ и $B^n = B \times \cdots (\text{n раз}) \cdots \times B = \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) : \beta_i \in B\}$ - *единичный n-мерный куб*, для которого $|B^n| = 2^n$. Примеры:
$B = B^1 = \{0, 1\}$, $B^2 = \{(00), (01), (10), (11)\}$,
$B^3 = \{(000), (001), (010), (011), (100), (101), (110), (111)\}$ и т.д. Наборы $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из $B^n$ упорядочиваются, как правило, в соответствии с их *лексикографическими номерами* $\nu(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i 2^{n-i}$, задающими взаимно-однозначное соответствие $B^n \overset{\nu}{\leftrightarrow} [0, 2^n)$, которое определяет на $B^n$ отношение *лексикографического* (полного или линейного) *порядка*.

Будем считать, что $B^n = B^n(x_1, \ldots, x_n)$, где $\mathfrak{X} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ - упорядоченный счетный алфавит (входных) булевых переменных (БП). При этом под ФАЛ $f(x_1, \ldots, x_n)$ от БП $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ будем понимать отображение $B^n \xrightarrow{f} B$ и будем задавать её либо *столбцом значений* $\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{2^n-1}) \in B^{2^n}$, где $f(\beta) = \alpha_{\nu(\beta)}$, который, обычно, размещается в линейной или прямоугольной *таблице значений f*, либо *характеристическим множеством* $N_f = \{\beta \in B^n : f(\beta) = 1\}$ или его дополнением $\overline{N_f} = B^n \backslash N_f$.

| $x_1$ | 0 | $\overline{x}_1$ | $x_1$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

a)

| $x_1$ | $x_2$ | & | $\vee$ | $\oplus$ | $\sim$ | $\to$ | $\mid$ | $\downarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

b)

| $\widetilde{\alpha}_f$ | название функции $f$ |
|---|---|
| (00) | — "0" (константа нуль) |
| (11) | — "1" (константа единица) |
| (01) | — тождественная функция |
| (10) | — отрицание |
| (0001) | — конъюнкция (умножение) |
| (0111) | — дизъюнкция |
| (0110) | — сумма по модулю 2 |
| (1001) | — эквивалентность |
| (1101) | — импликация |
| (1110) | — штрих Шеффера |
| (1000) | — стрелка Пирса |

c)

Рис. 2.2: $P_2(1)$ и «основные» ФАЛ из $P_2(2)$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $H$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

a)

| $x_1$ \ $x_3$ / $x_2$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 0 | 0 | 0 |
| 0 1 | 0 | 1 |
| 1 1 | 1 | 1 |

| $x_1$ \ $x_2$ / $x_3$ | 0 0 | 1 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

b)

$$N_H = \{(011), (101), (110), (111)\}$$
$$\overline{N}_H = \{(000), (001), (010), (100)\}$$

c)

Рис. 2.3: функция голосования

## Некоторые функционалы и отношения на кубе $B^n$, характеристические функции некоторых его подмножеств.

Для набора $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B^n$ число $||\beta|| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$ будем считать его *весом*, а затем для $i = 0, 1, \ldots, n$ множество $B_i^n = \{\beta \in B^n : ||\beta|| = i\}$ определим как *i-й слой* куба $B^n$, для которого, очевидно, $|B_i^n| = C_n^i$.

Заметим, что ФАЛ $f, f \in P_2(n)$, *симметрична* $\Leftrightarrow$ её характеристическое множество $N_f$ представляет собой объединение слоёв куба $B^n$.

Напомним, что для наборов $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ и $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ из $B^n$:

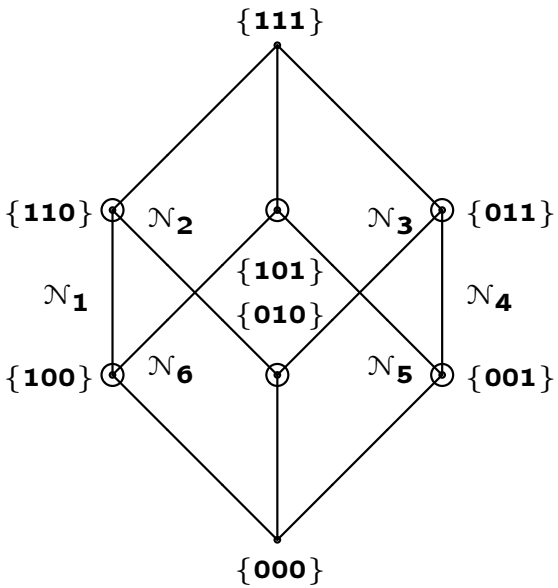
- выполнено неравенство $\beta \geqslant \gamma \Leftrightarrow \beta_i \geqslant \gamma_i$ при всех $i, i \in [1, n]$;

- величина $\rho(\beta, \gamma)$ - т.н. *расстояние Хэмминга* между $\beta$ и $\gamma$, - равна числу тех разрядов $i, i \in [1, n]$, для которых $\beta_i \neq \gamma_i$ и что в случае, когда $\rho(\beta, \gamma) = 1$, эти наборы называются *соседними*.

При этом отношение $\beta \geqslant \gamma$ задаёт на $B^n$ отношение *монотонного* (частичного) *порядка*.

Куб $B^n$ при $n \leqslant 4$ удобно задавать в «геометрическом» варианте в виде графа с $2^n$ расположенными по слоям вершинами и $n2^{n-1}$ рёбрами, которые соединяют соседние вершины куба, лежащие, очевидно, в соседних слоях.

$$g\{x_1, x_2, x_3\} = \underbrace{x_1\overline{x}_3}_{K_1} \vee \underbrace{x_2\overline{x}_3}_{K_2} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_2}_{K_3} \vee \underbrace{\overline{x}_1 x_3}_{K_4} \vee \underbrace{\overline{x}_2 x_3}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\overline{x}_2}_{K_6}.$$




$$\overline{N}_g = \{\{000\}, \{111\}\},$$

$$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_2 = K_2 \vee K_4 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee, K_4 \vee K_5,$$

$$\mathfrak{A}_4 = K_2 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_6,$$

$$\mathfrak{A}_5 = K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_1.$$

Важнейшее семейство подмножеств куба $B^n$ составляют его грани. Для набора натуральных чисел $I = (i_1, \ldots, i_r)$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_r \leqslant n$, и двоичного набора $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in B^r$ определим связанную с ними *грань ранга* $r$ или, иначе, размерности $(n - r)$ куба $B^n$ как множество

$$B_\sigma^{n,I} = \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in B^n : \beta_{i_1} = \sigma_1, \ldots, \beta_{i_r} = \sigma_r\},$$

мощность которого равна $2^{n-r}$. Данную грань можно однозначно задать троичным набором $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \{0, 1, 2\}^n$, где $\gamma_i = \beta_i$, если $i \in I$, и $\gamma_i = 2$ в остальных случаях.

При этом сам куб $B^n$ считается гранью размерности $n$, его наборы - гранями размерности 0, а рёбра - гранями размерности 1. Заметим, что, число граней ранга $r$ в кубе $B^n$ равно $C_n^r 2^{n-r}$, а число всех граней - $3^n$.

Заметим также, что в силу свойств ФАЛ $x_1 \cdot x_2$ характеристическая ФАЛ указанной выше грани задаётся т.н. *элементарной конъюнкцией ранга $r$ от БП $X(n)$* вида $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \bullet \cdots \bullet x_{i_r}^{\sigma_r}$, где, как обычно, $x^0 = \overline{x}$ и $x^1 = x$.

Из свойств ФАЛ $x_1 \vee x_2$, в свою очередь, следует, что формула вида $\mathfrak{A} = K_1 \vee \cdots \vee K_s$, где $K_j$ - ЭК ранга $r_j$ от БП $X(n)$ и $K_i \neq K_j$ при $i \neq j$, которая называется *дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) от множества БП $X(n)$, задаёт характеристическую ФАЛ $f$ множества $N_f = N_{K_1} \vee \cdots \vee N_{K_s}$. При этом число $s$ задаёт т.н. *длину* $\lambda(\mathfrak{A})$, а число $r_1 + \cdots + r_s$ - т.н. *ранг* $R(\mathfrak{A})$ ДНФ $\mathfrak{A}$. В том случае, когда $R(\mathfrak{A}) = n|N_f|$, то есть ранги всех ЭК ДНФ $\mathfrak{A}$ равны $n$, она называется *совершенной* ДНФ.

Для любой ФАЛ $f, f \in P_2(n), f \not\equiv 0$, её совершенная ДНФ имеет вид

$$\mathfrak{A}(f) = \bigvee_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\in N_f} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.$$

**Задача 1.** (гл. I, №2.3(3))

Построить совершенную ДНФ для ФАЛ $f, f \in P_2(3)$, для которой $\widetilde{\alpha_f} = (01010001)$.

**Решение:**

1. построим таблицу ФАЛ $f$;
2. находим наборы из $N_f = \{(001), (011), (111)\}$;
3. выписываем $\mathfrak{A}_{\text{сов.}}(f) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | f |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# 2. Сокращённая ДНФ и способы её построения

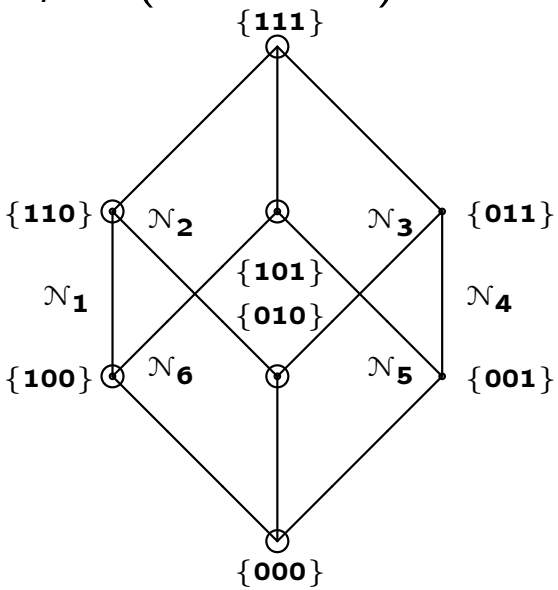
Если для ЭК $K$ от БП $X(n)$ и ФАЛ $f$ из $P_2(n)$ имеет место включение $N_K \subseteq N_f$, то $K$ называется *импликантой*, а множество $N_K$ - гранью $f$. Если же при этом, кроме того, нет такой ЭК $K'$ от БП $X(n)$, для которой $N_K \subset N_{K'} \subseteq N_f$, то $K$ считается *простой импликантой* ФАЛ $f$, а грань $N_K$ - её *максимальной гранью*. При этом сокращённая ДНФ ФАЛ $f$ определяется как дизъюнкция всех её простых импликант (ПИ), которая соответствует покрытию множества $N_f$ всеми максимальными гранями ФАЛ $f$. «Геометрический» способ построения сокращённой ДНФ основан на её определении и использовании геометрии граней единичного куба.

**Задача 2.** (гл. IX, №2.1(1, 2)) Из заданного множества ЭК выделить ПИ ФАЛ $f$, а затем построить её сокращённую ДНФ геометрическим способом.

1) $A = \{x_1, \overline{x}_3, x_1x_2, x_2\overline{x}_3\}$

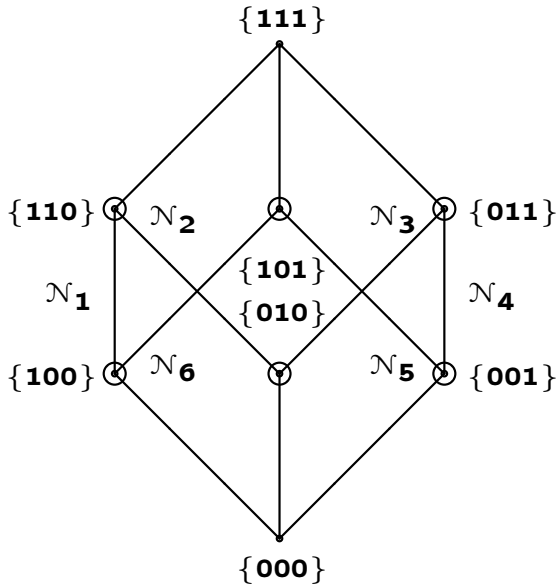
$N_f = \{(000), (010), (100), (101), (110), (111)\}$

$\alpha_f = (01101111)$




2) $A = \{x_1\overline{x}_2, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$

$\alpha_f = (01111110)$

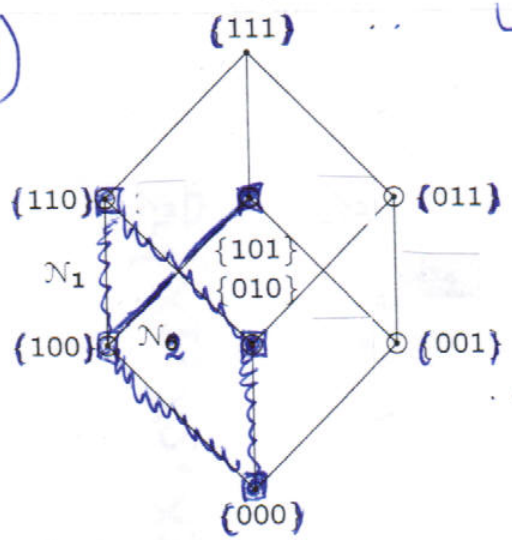



Ответ: $x_1, \overline{x}_3$. $\mathfrak{A} = x_1 \vee \overline{x}_3$

Задача 3 (п. IV, 2.5(1,5)). Построить геометрически сокращенную ДНФ ФАЛ f, где: 1) $\tilde{\alpha}_f = (11110100$; 5) $\tilde{\alpha}_f = (1111\,1000\,0100\,1100)$

Решение

1)

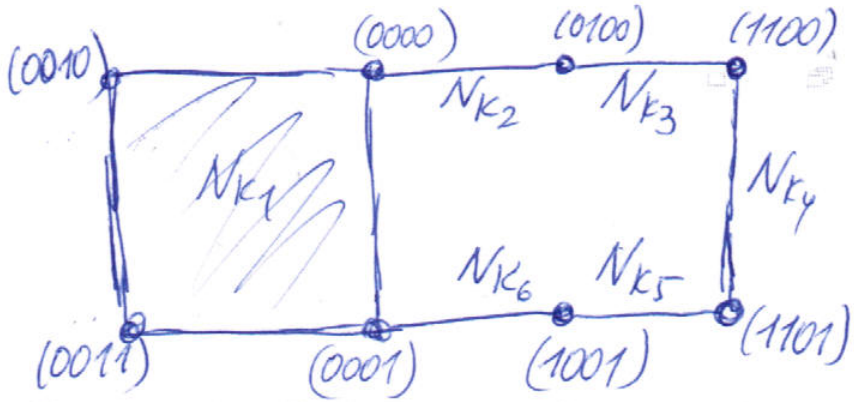



$K_1 = \bar{x}_1$, $K_2 = \bar{x}_2 x_3$, $\mathcal{DH}_{сокр.}(f) = K_1 \vee K_2$

$\tilde{N}_1 = N_{K_1} = \{(000), (001), (010), (011)\}$

$\tilde{N}_2 = N_{K_2} = \{(100), (101)\}$

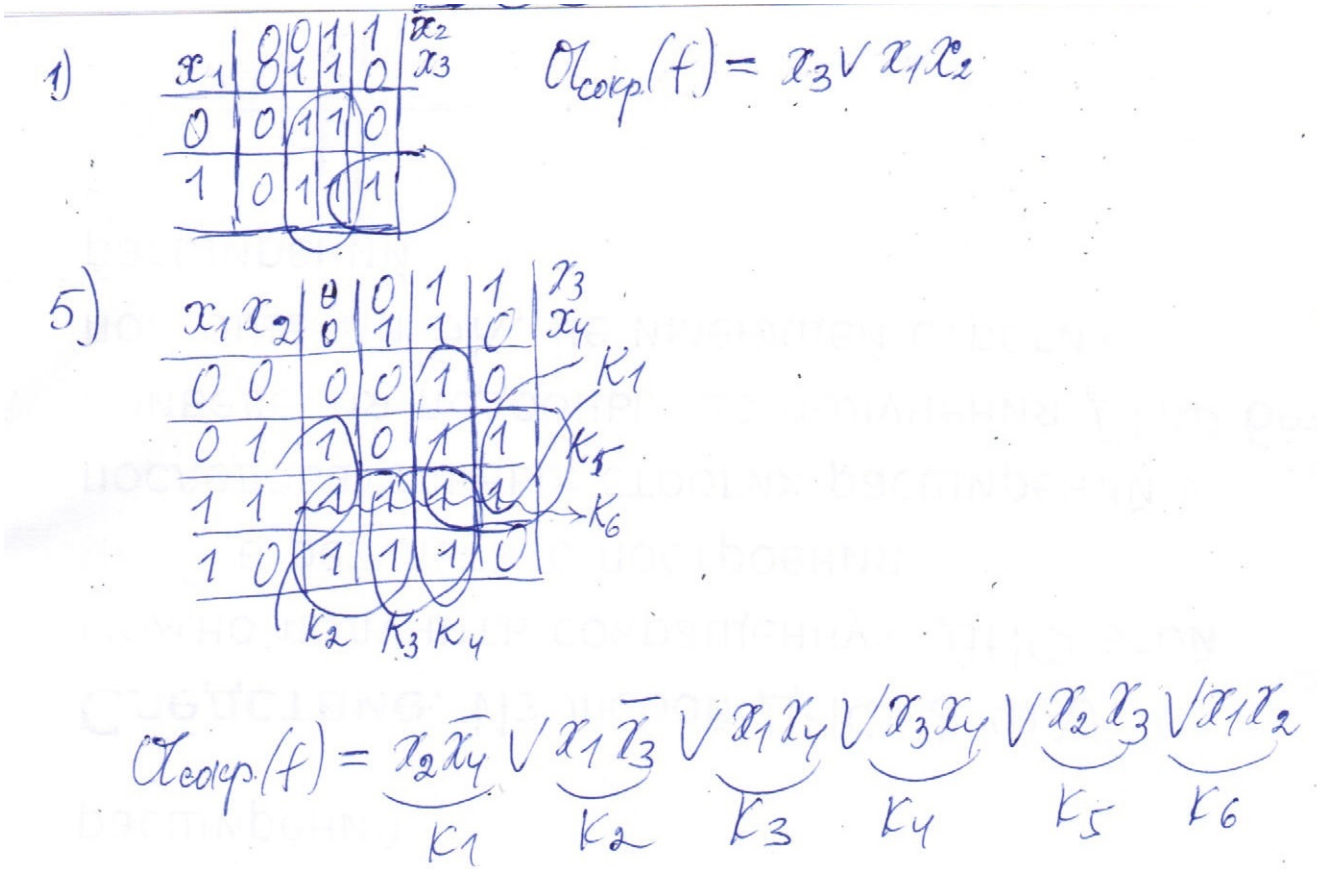
5) $K_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2$, $K_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$, $K_3 = x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$, $K_4 = x_1 x_2 \bar{x}_3$, $K_5 = x_1 \bar{x}_3 x_4$, $K_6 = \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$



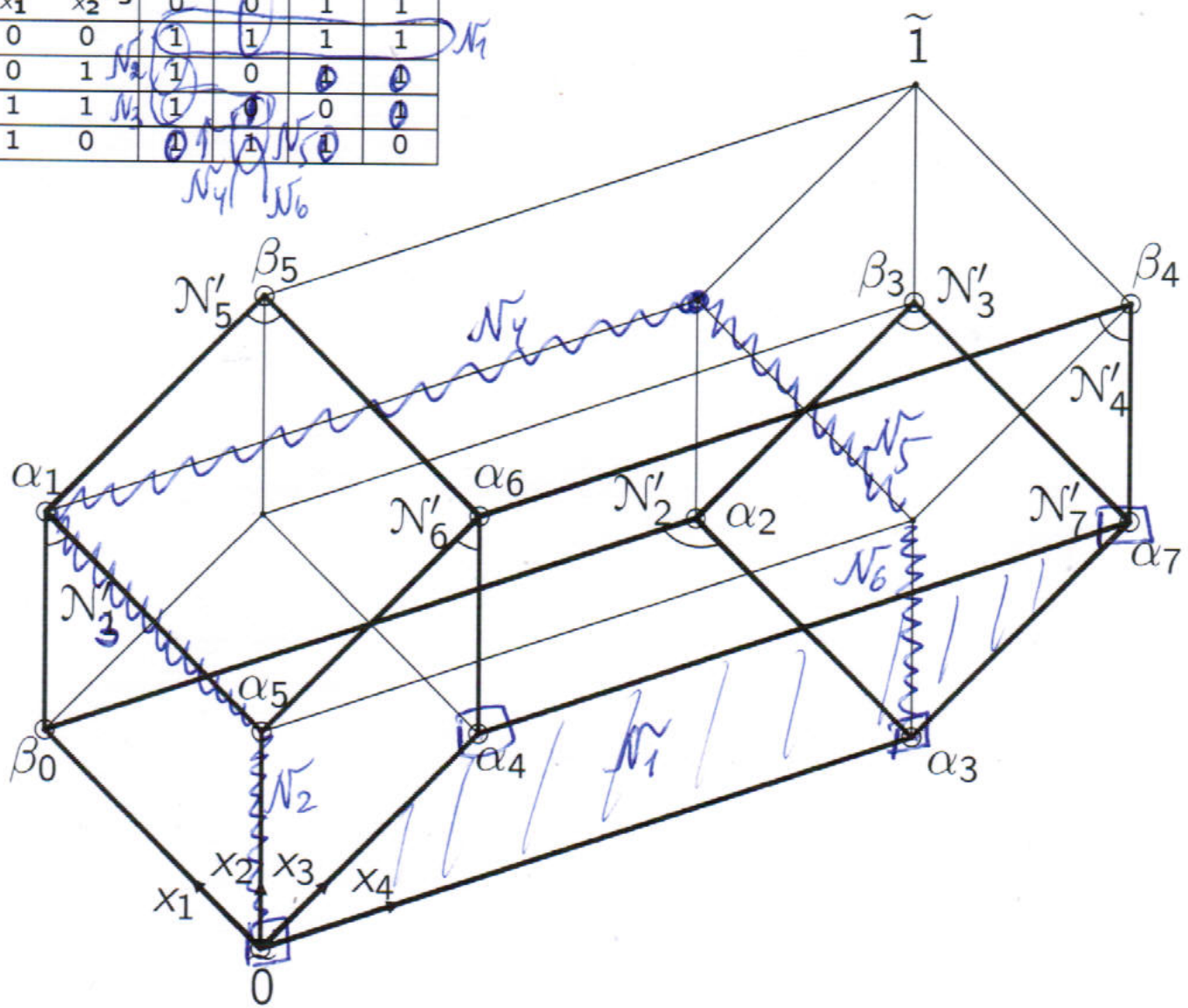
**Задача 4.** (гл. IX, №2.6(1, 5)) Найти сокр. ДНФ ФАЛ $f$ с помощью минимизирующей карты Карно:

1) $\widetilde{\alpha_f} = (01010111)$

2) $\widetilde{\alpha_f} = (0001101111011111)$



| $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ / $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | | 1 | 1 | 1 | 0 |



**Тождество поглощения** $t^{\Pi}: x_1 = x_1 \vee x_1 x_2$ используется при построении сокращённой ДНФ из КНФ в соответствии со следующим Утверждением.

**Утверждение 2.1.** Пусть $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}''$ — сокращенные ДНФ ФАЛ $f'$ и $f''$ соответственно, а ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из формулы $\mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}''$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных. Тогда $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ $f = f' \cdot f''$.

**Следствие.** Если ДНФ $\mathfrak{A}$ без поглощений ЭК получается из КНФ $\mathfrak{B}$ ФАЛ $f$ в результате раскрытия скобок и приведения подобных, то $\mathfrak{A}$ — сокращенная ДНФ ФАЛ $f$.

**Задача 5.** (гл. IX, №2.3(1, 2))

Построить сокращённую ДНФ из заданной КНФ.

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$

2) $(x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$

**Решение:**

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) = (x_2 \vee x_1 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) =$

$= x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3$

2) $(x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) = x_1 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3$

**Тождество обобщённого склеивания** $t^{\text{ОС}}: \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ используется при построении сокращённой ДНФ из ДНФ в соответствии со следующим утверждением.

**Утверждение 2.2.** ДНФ без поглощений ЭК является сокращенной ДНФ тогда и только тогда, когда она не имеет строгих расширений.

**Следствие.** Из любой ДНФ $\mathfrak{A}$ ФАЛ $f$ можно получить сокращенную ДНФ этой ФАЛ в результате построения последовательных строгих расширений и приведения подобных до получения ДНФ без поглощений ЭК, не имеющей строгих расширений.

**Задача 6.** (гл. IX, №2.2(1, 2))

Построить сокращённую ДНФ ФАЛ $f$ по её ДНФ:

1) $\mathfrak{A} = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$

2) $\mathfrak{A} = x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$

**Решение:**

1) $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \mapsto \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \mapsto$

$\mapsto \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \mapsto \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_3x_4$

2) $x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \mapsto x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \mapsto$

$\mapsto x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4$

**Задача 7.** (гл. IX, №2.9(1, 3)) Найти длину сокращённой ДНФ ФАЛ $f$:

1) $f = x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$

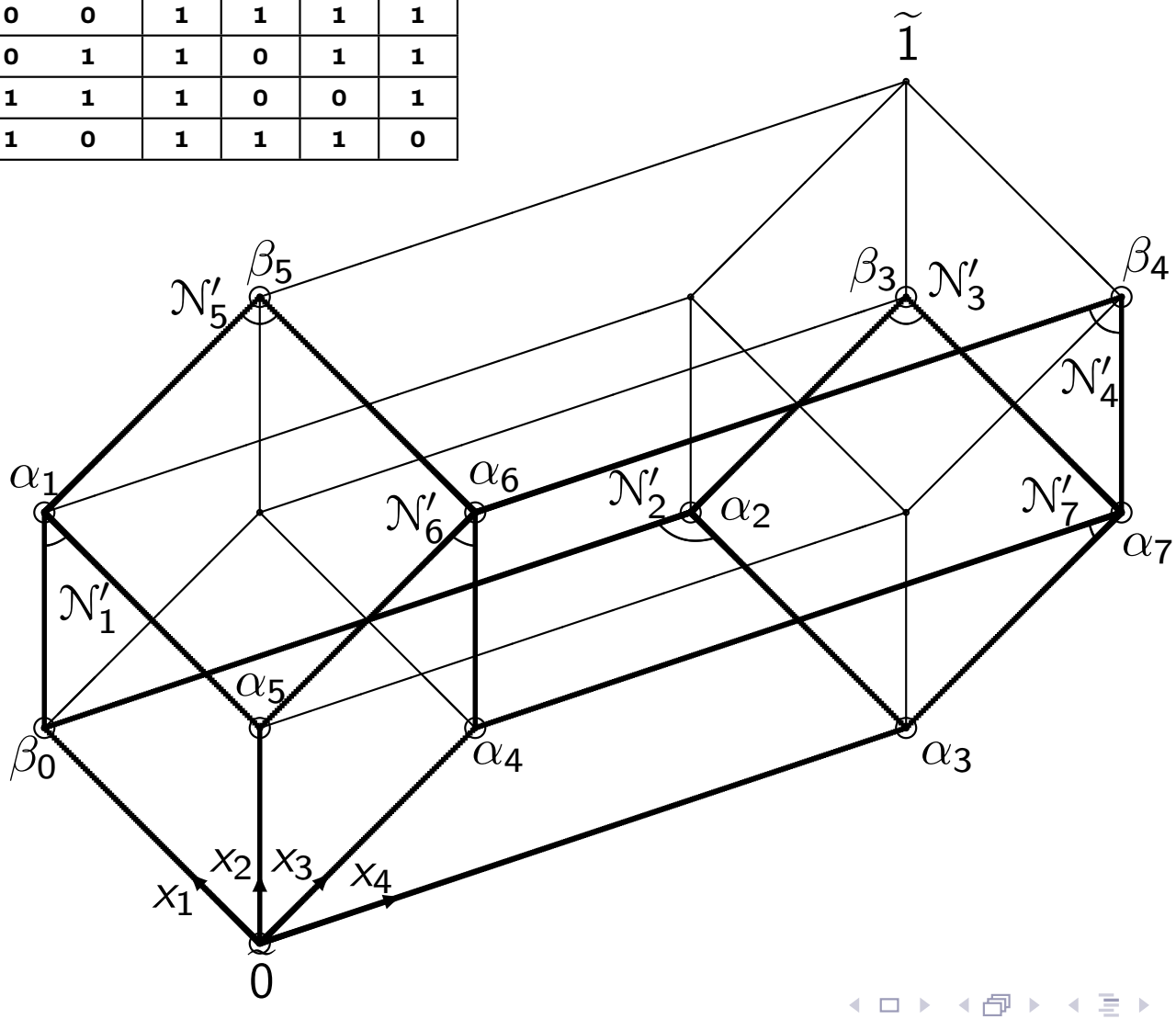
3) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \oplus \cdots \oplus x_n)$

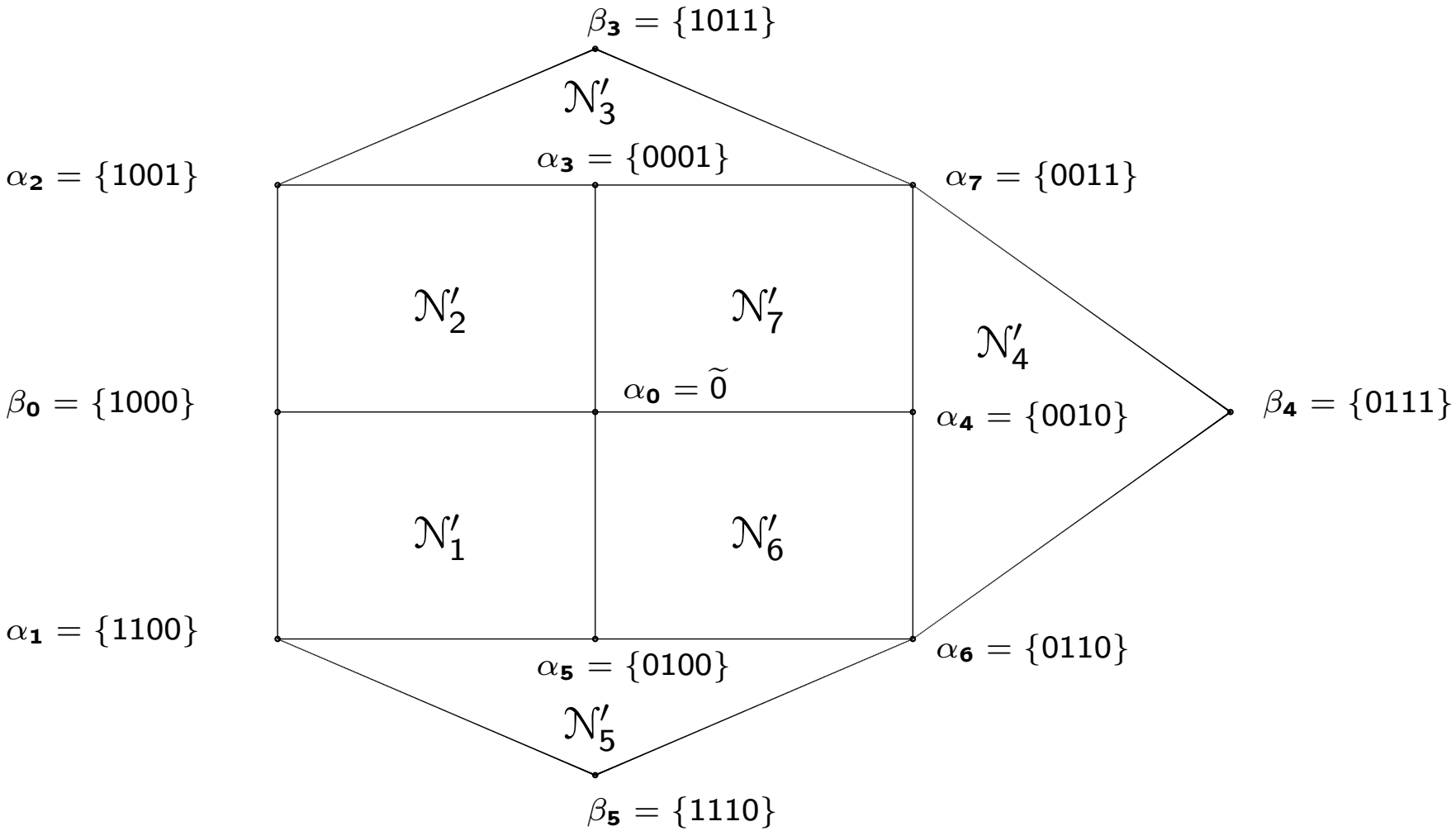
**Решение:**

1) Сов. ДНФ длины $2^{n-1}$ является единственной ДНФ ФАЛ $f$ от БП $X(n)$.

3) Представим ФАЛ $f$ в виде $f = g(x_1, x_2, x_3) \cdot l_{n-3}(x_1, \ldots, x_n)$ и воспользуемся тем, что сокращённая ДНФ ФАЛ $g$ состоит из 6 рёбер куба $B^3(x_1, x_2, x_3)$, а сокращённая ДНФ ФАЛ $l_{n-3}(x_4, \ldots, x_n)$ совпадает с её совершенной ДНФ и состоит из $2^{n-5}$ наборов куба $B^{n-4}(x_4, \ldots, x_n)$, имеющих нечётное число единиц. Следовательно, по утверждению 3.1 сокращённая ДНФ ФАЛ $f$ будет состоять из $6 \cdot 2^{n-5}$ граней ранга 3.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_4$ / $x_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | | 1 | 1 | 1 | 0 |






$$\mathfrak{A}'_1 = K'_1 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5, \quad \mathfrak{A}'_2 = K'_2 \vee K'_3 \vee K'_4 \vee K'_5.$$

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической кибернетики

# Семинары по курсу «Основы кибернетики»

Москва, 2020

# Семинар 1.

# Семинар 2. Алгебраические методы построения сокращенной ДНФ. Тупиковые ДНФ, ядро и ДНФ пересечение тупиковых

**I. Окончание семинара 1** (по необходимости).

Напомнить определение импликанты ФАЛ, простой импликанты ФАЛ и ее сокращенной ДНФ, а также геометрический смысл этих понятий.

*Задача 2.1.* Из заданного множества $A$ элементарных конъюнкций (ЭК) выделить простые импликанты (ПИ) ФАЛ $f$ и $g$:

1. $A = \{x_1, \bar{x}_3, x_1x_2, x_2\bar{x}_3\}$, $\tilde{\alpha}_f = (00101111) \Rightarrow$ "геометрически" строим сокращенную ДНФ ФАЛ $f$ вида $x_1 \vee x_2\bar{x}_3$, в которую из $A$ входят только ПИ $x_1$ и $x_2\bar{x}_3$, причем ЭК $\bar{x}_3$ не является импликантой $f$, а ЭК $x_1x_2$ является импликантой, но не является ПИ;

2. $A = \{x_1\bar{x}_2, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$, $\tilde{\alpha}_g = (01111110) \Rightarrow$ сокращенная ДНФ ФАЛ $g$ имеет вид $x_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2 = K_1 \vee \cdots \vee K_6$, в которую из $A$ входит только $K_6$.

**II. Построение сокращенной ДНФ: а) методом Нельсона; б) методом Блейка.**

а) *Задача 2.3* (1, 2):

1) $f = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = (x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3$

2) $f = (x_1 \vee \bar{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) = x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$

*Задача 2.9* (3):

$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \cdot (x_4 \oplus \cdots \oplus x_n) =$ ( см. п.I.2)

$(K_1 \vee \cdots \vee K_6) \cdot (\bigvee\limits_{(\sigma_4,\ldots,\sigma_n) \in B^n_{\text{неч}}} x_4^{\sigma_4} \cdots x_n^{\sigma_n}) = \bigvee\limits_{i=1}^{6} \bigvee\limits_{(\sigma_4,\ldots,\sigma_n) \in B^n_{\text{неч}}} x_4^{\sigma_4} \cdots x_n^{\sigma_n} \cdot K_i,$

где $B^m_{\text{неч}}$ — множество всех наборов длины $m$ с нечетным числом 1; при этом полученная сокращенная ДНФ ФАЛ $f$ имеет длину $6 \cdot 2^{n-4}$.

б) *Задача 2.2* (1,2) (те ЭК, к которым применяется обобщенное склеивание, выделены полужирным шрифтом):

1) $\boldsymbol{\bar{x}_1\bar{x}_2} \vee \boldsymbol{x_1\bar{x}_2x_4} \vee x_2\bar{x}_3x_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \boldsymbol{\bar{x}_2x_4} \vee \boldsymbol{x_2\bar{x}_3x_4} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_3x_4.$

2) $x_1\bar{x}_2x_3 \vee \boldsymbol{\bar{x}_1x_2\bar{x}_4} \vee \boldsymbol{\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4} = \boldsymbol{x_1\bar{x}_2x_3} \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_4 \vee \boldsymbol{\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4} \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 = x_1\bar{x}_2x_3 \vee \cdots \vee x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$

**III. Определения: тупиковой ДНФ, ядровой точки, ядровой грани, ядра и ДНФ пересечение тупиковых**.

*Задача 2.14* (1,2):

Показать, что всякая простая импликанта $K$ ФАЛ $f$ из $P_2(n)$ ранга $r$ является ядровой, если: 1) $r = n$; 2) $r \leq 1$.

*Решение*

1) Заметим, что множество $N_K$ состоит из единственного набора $\alpha$, $\alpha \in N_f$, который в силу максимальности грани $N_K$ для ФАЛ $f$ не может принадлежать никакой другой максимальной грани ФАЛ $f$. Это означает, что грань $N_K$ является ядровой гранью ФАЛ $f$, так как она содержит ядровую точку $\alpha$ этой ФАЛ.

2) В случае $r = 0$ утверждение верно, если считать, что при этом $f = K = 1$, то есть $K$ — "пустая" ЭК и $N_K = B^n$.

Осталось рассмотреть случай, когда $r = 1$, то есть $K = x_i^\sigma$, где $1 \leq i \leq n$ и $\sigma \in B$. Заметим, что в данном случае имеет место строгое включение $N_f \setminus B_\sigma^{n;i} \subset B_{\bar{\sigma}}^{n;i}$, так как в противном случае выполнялось бы равенство $N_f = B^n$. Это означает, что найдется набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \bar{\sigma}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \in \bar{N_f}$ такой, что соответствующий ему набор $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \sigma, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ является ядровой точкой ФАЛ $f$.

Действительно, для любой содержащей точку $\beta$ и отличной от $N_K$ грани $N_{K'}$ ФАЛ $f$ в ЭК $K'$ должна входить буква $x_i^\sigma$, так как иначе не могли бы выполняться равенства $f(\beta) = 1$, $f(\alpha) = 0$. Следовательно, ни одна максимальная и отличная от $N_K$ грань ФАЛ $f$ не может проходить через точку $\beta$.

*Задача 3.3* (1,2):

Построить ядро и ДНФ $\cap T$ ФАЛ $f$, заданной сокращенной ДНФ:

1) $f = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_3$ — цепная ФАЛ длины 3, ядро которой состоит из граней $N_{K_1}, N_{K_2}$;

2) $f = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 = K_1 \vee \cdots \vee K_6$ — данная ДНФ является сокращенной ДНФ ФАЛ $f$ и "геометрически" состоит из квадрата, две соседние точки которого соединены цепочкой из 5 ребер, ее ядром является грань $N_{K_1}$.

*Задача 2.12* (3):

Найти число ядровых ПИ у ФАЛ из приведенной выше *задачи 2.9(3)*.

*Решение*

С "геометрической точки" зрения сокращенная ДНФ данной ФАЛ представляет собой си-

стему из $2^{n-4}$ циклов длины 6. Следовательно, у нее нет ядровых простых импликант.

# Семинар 3. ДНФ Квайна и ДНФ сумма тупиковых. Таблица Квайна, методы построения всех тупиковых ДНФ.

**I.**

Напомнить определение ДНФ Квайна и ДНФ $\sum$T. Построить указанные ДНФ для ФАЛ из следующих задач.

*Задача 3.1.* (1, 5):

1) $f = x_1x_2 \vee \bar{x}_2 = x_1 \vee \bar{x}_2$ — сокр. ДНФ = ДНФ Квайна = ДНФ $\sum$T ФАЛ $f$;

5) $f = x_1x_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 = x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2$ — сокр. ДНФ = ДНФ Квайна = ДНФ $\sum$T ФАЛ $f$.

*Задача 3.3.* (1, 2):

1) $f =$ (см. занятие 2) $= x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_3$ — цепная ФАЛ длины 3, ядро которой состоит из граней $N_{K_1}, N_{K_2}$, а ее ДНФ Квайна = ДНФ $\sum$T $= K_1 \vee K_2$;

2) $f =$ (см. занятие 2) $= \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 = K_1 \vee \cdots \vee K_6$ — данная ДНФ является сокращенной ДНФ ФАЛ $f$ и "геометрически" состоит из квадрата, две соседние точки которого соединены цепочкой из 5 ребер, ее ядром является грань $N_{K_1}$, а ее ДНФ Квайна = ДНФ $\sum$T = сокр. ДНФ.

**II. Построить все тупиковые ДНФ для ФАЛ, заданной своей сокращенной ДНФ, и, возможно, найти среди них минимальные.**

*Задача 3.4.* (3):

3) $f = \bar{x}_1x_4 \vee \bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_3x_4 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5$.

Построим таблицу Квайна:

| | $(0**1)$ | | | | $(*0*1)$ | | $(**01)$ | $(11**)$ | | | $(*11*)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (0001)(0101) (0011)(0111) | | | | ~~(0001)~~(0011) (1001)(1011) | | ~~(0001)~~(0101) ~~(1001)~~(1101) | (1100)~~(1101)~~ (1110)(1111) | | | (0110)~~(0111)~~ ~~(1110)~~~~(1111)~~ | |
| $K_1 = \bar{x}_1 x_4$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | Р |
| $K_2 = \bar{x}_2 x_4$ | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | | | | | Я |
| $K_3 = \bar{x}_3 x_4$ | 1 | 1 | | | | 1 | 1 | | | | | Я |
| $K_4 = x_1 x_2$ | | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | Я |
| $K_5 = x_2 x_3$ | | | | 1 | | | | | 1 | 1 | 1 | Я |
| | Р | Р | Р | Р | Я | Р | Я | Я | Р | Р | Я | ядр./рег. |

ДНФ Квайна = ДНФ $\sum$Т = ДНФ $\sum$М = $K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5$

**II. Построить все тупиковые ДНФ для ФАЛ, заданной столбцом значений**

*Задача 3.6.* (1, 4, 7):

1) $\tilde{\alpha}_f = (0111\,1100)$ — цепная ФАЛ длины 4 от БП $x_1$, $x_2$, $x_3$;

Карта Карно ФАЛ $f$:

| | 0 | 0 | 1 | 1 | $x_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 1 | 1 | 0 | $x_3$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| | | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | | | |

$\{\alpha_1, \alpha_2\} = N_{K_1}$, $K_1 = x_1\bar{x}_2$;

$\{\alpha_2, \alpha_3\} = N_{K_2}$, $K_2 = \bar{x}_2 x_3$;

$\{\alpha_3, \alpha_4\} = N_{K_3}$, $K_2 = \bar{x}_1 x_3$;

$\{\alpha_4, \alpha_5\} = N_{K_4}$, $K_4 = \bar{x}_1 x_2$.

Таблица Квайна:

| | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{K_1}$ | 1 | 1 | | | | Я | $y_1$ |
| $N_{K_2}$ | | 1 | 1 | | | | $y_2$ |
| $N_{K_3}$ | | | 1 | 1 | | | $y_3$ |
| $N_{K_4}$ | | | | 1 | 1 | Я | $y_4$ |
| | Я | Р | | Р | Я | Я/Р | |

КНФ ФАЛ покрытия редуцированной таблицы Квайна:

$\hat{F}(y_2, y_3) = y_2 \vee y_3$.

Тупиковые ДНФ:

$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_2 \vee K_4$,

$\mathfrak{A}_2 = K_1 \vee K_3 \vee K_4$,

обе являются минимальными и кратчайшими.

4) $\tilde{\alpha}_f = (1111\,1000\,0100\,1100)$

Карта Карно ФАЛ $f$:

| $x_1\ x_2$ | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 | $x_3$ $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 $\alpha_1$ | 1 $\alpha_2$ | 1 $\alpha_3$ | 1 $\alpha_4$ | |
| 0 1 | 1 $\alpha_5$ | 0 | 0 | 0 | |
| 1 1 | 1 $\alpha_6$ | 1 $\alpha_7$ | 0 | 0 | |
| 1 0 | 0 | 1 $\alpha_8$ | 0 | 0 | |

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\} = N_{K_1}$, $K_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2$;

$\{\alpha_1, \alpha_5\} = N_{K_2}$, $K_2 = x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$;

$\{\alpha_5, \alpha_6\} = N_{K_3}$, $K_3 = x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$;

$\{\alpha_6, \alpha_7\} = N_{K_4}$, $K_4 = x_1x_2\bar{x}_3$;

$\{\alpha_7, \alpha_8\} = N_{K_5}$, $K_5 = x_1\bar{x}_3x_4$;

$\{\alpha_8, \alpha_2\} = N_{K_6}$, $K_6 = \bar{x}_2\bar{x}_3x_4$.

*Замечание:* Эта ФАЛ совпадает с ФАЛ из *Задачи 3.3* (2) из семинара 2 и с "геометрической" точки зрения ее сокращенная ДНФ - квадрат, две соседние точки которого соединены цепочкой из 5 ребер:

$f = \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 = K_1 \vee \cdots \vee K_6$.

Таблица Квайна:

| | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_7$ | $\alpha_8$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{K_1}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | Я | $y_1$ |
| $N_{K_2}$ | 1 | | | | 1 | | | | | $y_2$ |
| $N_{K_3}$ | | | | | 1 | 1 | | | | $y_3$ |
| $N_{K_4}$ | | | | | | 1 | 1 | | | $y_4$ |
| $N_{K_5}$ | | | | | | | 1 | 1 | | $y_5$ |
| $N_{K_6}$ | | 1 | | | | | | 1 | | $y_6$ |
| | | | Я | Я | | | | | Я/Р | |

КНФ ФАЛ покрытия редуцированной таблицы Квайна:

$\hat{F}(y_2, \ldots, y_6) = (y_2 \vee y_3) \cdot (y_3 \vee y_4) \cdot (y_4 \vee y_5) \cdot (y_5 \vee y_6) = (y_2y_4 \vee y_3) \cdot (y_5 \vee y_4y_6) = y_3y_5 \vee y_2y_4y_5 \vee y_3y_4y_5 \vee y_2y_4y_6$

тупиковые ДНФ:

$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_3 \vee K_5$ — кратчайшая и минимальная;

$\mathfrak{A}_2 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5$;

$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5$;

$\mathfrak{A}_4 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_6$.

7) $\tilde{\alpha}_f = (0001\,0111\,1010\,1110)$

Карта Карно ФАЛ $f$:

| $x_1\ x_2$ | 0<br>0 | 0<br>1 | 1<br>1 | 1<br>0 | $x_3$<br>$x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 0 | 0 | 1<br>$\alpha_9$ | 0 | |
| 0 1 | 0 | 1<br>$\alpha_7$ | 1<br>$\alpha_6$ | 1<br>$\alpha_5$ | |
| 1 1 | 1<br>$\alpha_3$ | 1<br>$\alpha_8$ | 0 | 1<br>$\alpha_1$ | |
| 1 0 | 1<br>$\alpha_4$ | 0 | 0 | 1<br>$\alpha_2$ | |

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_4\} = N_{K_1}$, $K_1 = x_1\bar{x}_4$;

$\{\alpha_1, \alpha_5\} = N_{K_2}$, $K_2 = x_2x_3\bar{x}_4$;

$\{\alpha_5, \alpha_6\} = N_{K_3}$, $K_3 = \bar{x}_1x_2x_3$;

$\{\alpha_6, \alpha_7\} = N_{K_4}$, $K_4 = \bar{x}_1x_2x_4$;

$\{\alpha_7, \alpha_8\} = N_{K_5}$, $K_5 = x_2\bar{x}_3x_4$;

$\{\alpha_3, \alpha_8\} = N_{K_6}$, $K_6 = x_1x_2\bar{x}_3$;

$\{\alpha_6, \alpha_9\} = N_{K_7}$, $K_7 = \bar{x}_1x_3x_4$.

Таблица Квайна:

| | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_7$ | $\alpha_8$ | $\alpha_6$ | $\alpha_9$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{K_1}$ | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | Я | $y_1$ |
| $N_{K_2}$ | | | | | 1 | | | | | | $y_2$ |
| $N_{K_3}$ | | | | | 1 | | | 1 | | | $y_3$ |
| $N_{K_4}$ | | | | | | 1 | | 1 | | | $y_4$ |
| $N_{K_5}$ | | | | | | 1 | 1 | | | | $y_5$ |
| $N_{K_6}$ | | | 1 | | | | 1 | | | | $y_6$ |
| $N_{K_7}$ | | | | | | | | 1 | 1 | Я | $y_7$ |
| | Р | Я | Р | Я | | | | Р | Я | Я/Р | |

КНФ ФАЛ покрытия редуцированной таблицы Квайна:

$\hat{F}(y_2, \ldots, y_6) = (y_2 \vee y_3) \cdot (y_4 \vee y_5) \cdot (y_5 \vee y_6) = (y_2 \vee y_3) \cdot (y_5 \vee y_4y_6) = y_2y_5 \vee y_3y_5 \vee y_2y_4y_6 \vee y_3y_4y_6$

тупиковые ДНФ:

$\mathfrak{A}_1 = K_1 \vee K_2 \vee K_5 \vee K_7$;

$\mathfrak{A}_2 = K_1 \vee K_3 \vee K_5 \vee K_7$ — кратчайшие и минимальные;

$\mathfrak{A}_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_7$;

$\mathfrak{A}_4 = K_1 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_6 \vee K_7$.

**Решение задач семинара є 3 по курсу "Основы кибернетики"**
**для 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ.**
**Тема: "Эквивалентные преобразования формул"**

Теоретический материал [1: с. 146-148, 156-161], [2: с. 19].
В классе. Из [2]: 3.1 (1), 3.3 (1, 4), 3.8 (1-3), 3.9 (1).
На дом. Из [2]: 3.1 (2), 3.3 (3, 6), 3.8 (5-9), 3.9 (2).

**3.1 (1).** Используя только тождество ассоциативности конъюнкции

$$t^{\mathrm{A}}_{\&} : x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3,$$

вывести тождество $(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$.

**Решение**. Выполнив подстановку в тождество $t^{\mathrm{A}}_{\&}$, представляющую собой замену переменной $x_1$ на подформулу $x_1 \cdot x_2$, переменной $x_2$ — на подформулу $x_3$, а переменной $x_3$ — на подформулу $x_4$ (в дальнейшем вид конкретных подстановок уточняться не будет), однократным эквивалентным преобразованием на основе тождества $t^{\mathrm{A}}_{\&}$ получим требуемое:

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4) \overset{t^{\mathrm{A}}_{\&}}{\mapsto} ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4.$$

**3.3 (1).** С помощью расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\mathrm{ОСН}}$ преобразовать в совершенную дизъюнктивную нормальную форму от переменных $x$, $y$, $z$ или в формулу $x\&\bar{x}$ формулу $x\bar{y}$.

**Решение**. $x\bar{y} \overset{t^{\mathrm{ПК}}_{1,\&}}{\mapsto} x\bar{y} \cdot (z \vee \bar{z}) \overset{t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee}}{\mapsto} x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$.

**3.3 (4).** С помощью расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\mathrm{ОСН}}$ преобразовать в совершенную дизъюнктивную нормальную форму от переменных $x$, $y$, $z$ или в формулу $x\&\bar{x}$ формулу $\overline{(xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x} \vee \bar{z})}$.

**Решение**. $\overline{(xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x} \vee \bar{z})} \overset{t^{\mathrm{A}}_{\vee}}{\mapsto} \overline{(xy \vee \bar{y}z) \vee (\bar{x} \vee \bar{z})} \overset{t^{\mathrm{M}}_{\vee}}{\mapsto} \overline{(xy \vee \bar{y}z)}\&\overline{(\bar{x} \vee \bar{z})} \overset{t^{\mathrm{M}}_{\vee}}{\rightrightarrows}$

$\overset{t^{\mathrm{M}}_{\vee}}{\rightrightarrows} (\overline{(xy)}\&\overline{(\bar{y}z)})\&(\bar{x}\&\bar{z}) \overset{t^{\mathrm{M}}_{\&},t^{\mathrm{M}}_{\neg}}{\rightrightarrows} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(y \vee \bar{z})\&(xz) \overset{t^{\mathrm{A}}_{\&},t^{\mathrm{K}}_{\&},t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(yxz \vee \bar{z}xz) \overset{t^{\mathrm{A}}_{\&},t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee},t^{\mathrm{K}}_{\&}}{\rightrightarrows}$

$\overset{t^{\mathrm{A}}_{\&},t^{\mathrm{K}}_{\&},t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(y(xz) \vee \bar{z}(xz)) \overset{t^{\mathrm{A}}_{\&},t^{\mathrm{K}}_{\&}}{\rightrightarrows} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(xyz \vee x(z\bar{z})) \overset{t^{\mathrm{ПК}}_{0,\&}}{\mapsto} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(xyz \vee z\bar{z}) \overset{t^{\mathrm{ПК}}_{0,\vee}}{\mapsto}$

$\overset{t^{\mathrm{ПК}}_{0,\vee}}{\mapsto} (\bar{x} \vee \bar{y})\&(xyz) \overset{t^{\mathrm{K}}_{\&},t^{\mathrm{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows} \bar{x}(xyz) \vee \bar{y}(xyz) \overset{t^{\mathrm{A}}_{\&},t^{\mathrm{K}}_{\&}}{\rightrightarrows} (yz)(x\bar{x}) \vee (xz)(y\bar{y}) \overset{t^{\mathrm{ПК}}_{0,\&}}{\rightrightarrows} (x\bar{x}) \vee (y\bar{y}) \overset{t^{\mathrm{ПК}}_{0,\vee}}{\mapsto} x\bar{x}.$

**3.8 (1).** Построить эквивалентное преобразование при помощи расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\mathrm{ОСН}}$ для формул $F_1$ и $F_2$, где

$$F_1 = x \vee yz \vee \bar{y}\bar{z},$$

$$F_2 = \overline{(x \vee y \vee z) \cdot (\overline{x \vee y} \vee \overline{x \vee z})}.$$

**Решение**. Выведем сначала из системы тождеств $\tilde{\tau}^{\text{ОСН}}$ вспомогательное тождество

$$t^*:\ x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 = x_1 \vee x_2$$

(оно понадобится не только в этой задаче).

$$x_1 \vee \bar{x}_1 x_2 \overset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\mapsto} x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \overset{t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\mapsto} (x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \overset{t^{\text{ОП}}_{\vee}}{\mapsto}$$

$$\mapsto((x_1 x_2 \vee x_1 x_2) \vee x_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1 x_2 \overset{t^{\text{A}}_{\vee},t^{\text{K}}_{\vee}}{\rightrightarrows} (x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2) \vee (x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 x_2) \overset{t^{\text{K}}_{\&},t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2(x_1 \vee \bar{x}_1) \overset{t^{\text{ПК}}_{1,\&}}{\rightrightarrows} x_1 \vee x_2,$$

что и требовалось. Теперь преобразуем $F_2$ к $F_1$.

$$F_2 = \overline{(x \vee y \vee z) \cdot (\overline{x \vee y} \vee \overline{x \vee z})} \overset{t^{\text{M}}_{\&}}{\mapsto} \overline{(x \vee y \vee z)} \vee \overline{(\overline{x \vee y} \vee \overline{x \vee z})} \overset{t^{\text{M}}_{\vee},t^{\text{M}}_{\neg}}{\rightrightarrows}$$

$$\overset{t^{\text{M}}_{\vee},t^{\text{M}}_{\neg}}{\rightrightarrows} \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee (x \vee y)\&(x \vee z) \overset{t^{\text{K}}_{\&},t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows} \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee (xx \vee yx \vee xz \vee yz) \overset{t^{\text{ОП}}_{\&},t^{\text{K}}_{\&},t^{\text{A}}_{\&},t^{\text{D}}_{\&,\vee},t^{\text{A}}_{\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee ((x \vee x(y \vee z)) \vee yz) \overset{t^{\text{П}}}{\mapsto} \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee (x \vee yz) \overset{t^{\text{K}}_{\vee},t^{\text{A}}_{\vee},t^{\text{A}}_{\&}}{\rightrightarrows} (x \vee \bar{x}(\bar{y}\bar{z})) \vee yz \overset{t^*}{\mapsto}$$

$$\mapsto (x \vee \bar{y}\bar{z}) \vee yz \overset{t^{\text{K}}_{\vee},t^{\text{A}}_{\vee}}{\rightrightarrows} x \vee yz \vee \bar{y}\bar{z} = F_1.$$

Эквивалентное преобразование построено.

**3.8 (2).** Построить эквивалентное преобразование при помощи расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\text{ОСН}}$ для формул $F_1$ и $F_2$, где

$$F_1 = \overline{(xy \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)} \vee \bar{x} \cdot (y \vee z \vee (x \vee \bar{z})y),$$

$$F_2 = (\bar{x} \vee \bar{y})(z \vee x) \vee \overline{(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}\bar{z}} \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}).$$

**Решение**. Преобразуем $F_1$.

$$F_1 = \overline{(xy \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)} \vee \bar{x} \cdot (y \vee z \vee (x \vee \bar{z})y) \overset{t^{\text{M}}_{\&},t^{\text{K}}_{\&},t^{\text{A}}_{\vee},t^{\text{K}}_{\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows \overline{(xy \vee \bar{z})} \vee \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee \bar{x} \cdot ((y \vee y(x \vee \bar{z})) \vee z) \overset{t^{\text{M}}_{\vee},t^{\text{П}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\overline{(xy)}\&\bar{\bar{z}}) \vee (\bar{\bar{x}}\&\bar{\bar{y}}) \vee \bar{x} \cdot (y \vee z) \overset{t^{\text{M}}_{\&},t^{\text{M}}_{\neg},t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows} ((\bar{x} \vee \bar{y})\&z) \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z \overset{t^{\text{K}}_{\&},t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z) \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee \bar{x}z \overset{t^{\text{K}}_{\vee},t^{\text{A}}_{\vee}}{\rightrightarrows} (\bar{x}z \vee \bar{x}z) \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y \overset{t^{\text{ОП}}_{\vee}}{\mapsto} \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y.$$

Преобразуем $F_2$.

$$F_2 = (\bar{x} \vee \bar{y})(z \vee x) \vee \overline{(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z}) \vee x\bar{y}\bar{z}} \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \overset{t^{\text{M}}_{\vee},t^{\text{K}}_{\&},t^{\text{D}}_{\&,\vee}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee \bar{x}x \vee \bar{y}x) \vee \overline{(\bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{z})} \cdot \overline{(x\bar{y}\bar{z})} \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \overset{t^{\text{A}}_{\vee},t^{\text{K}}_{\vee},t^{\text{K}}_{\&},t^{\text{M}}_{\&}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows ((\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee x\bar{x}) \vee (\overline{(\bar{y} \vee z)} \vee \overline{(\bar{x} \vee \bar{z})}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{\bar{z}}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \overset{t^{\text{ПК}}_{0,\vee},t^{\text{M}}_{\vee},t^{\text{M}}_{\neg}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (\bar{\bar{y}}\bar{z} \vee \bar{\bar{x}}\bar{\bar{z}}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}) \overset{t_{\neg}^{M}, t_{\&}^{A}, t_{\vee}^{A}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z} \vee xz) \cdot ((\bar{x} \vee (y \vee z)) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})) \overset{t_{\vee,\&}^{D}}{\mapsto}$$

$$\mapsto (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z} \vee xz) \cdot (\bar{x} \vee (y \vee z) \cdot \bar{y}) \overset{t_{\&}^{K}, t_{\&,\vee}^{D}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z} \vee xz) \cdot (\bar{x} \vee (y\bar{y} \vee \bar{y}z)) \overset{t_{\vee}^{K}, t_{0,\vee}^{\Pi K}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z} \vee xz) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y}z) \overset{t_{\&}^{K}, t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (y\bar{z}\bar{x} \vee xz\bar{x} \vee y\bar{z}\bar{y}z \vee xz\bar{y}z) \overset{t_{\&}^{\mathrm{K}}, t_{\&}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (\bar{x}y\bar{z} \vee z(x\bar{x}) \vee (y\bar{y})(z\bar{z}) \vee x\bar{y}(zz)) \overset{t_{0,\&}^{\Pi K}, t_{\&}^{\mathrm{O}\Pi}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (\bar{x}y\bar{z} \vee (x\bar{x}) \vee (z\bar{z}) \vee x\bar{y}z) \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\vee}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (((\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z) \vee (x\bar{x})) \vee (z\bar{z})) \overset{t_{0,\vee}^{\Pi K}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}) \vee (\bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z) \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\vee}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows} (\bar{x}z \vee \bar{x}y\bar{z}) \vee \bar{y}z \vee (x\bar{y} \vee (x\bar{y})z) \overset{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}, t^{\Pi}, t_{\vee}^{\mathrm{K}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows \bar{x}(z \vee \bar{z}y) \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \overset{t^{*}}{\mapsto} \bar{x}(z \vee y) \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \overset{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\mapsto} (\bar{x}z \vee \bar{x}y) \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\vee}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows} \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y.$$

Таким образом, $F_1$ и $F_2$ эквивалентными преобразованиями приведены к одному и тому же виду, что и доказывает эквивалентность этих формул.

**3.8 (3).** Построить эквивалентное преобразование при помощи расширенной системы тождеств $\tilde{\tau}^{\mathrm{OCH}}$ для формул $F_1$ и $F_2$, где

$$F_1 = \overline{(x \vee \bar{y}) \vee ((x \vee \bar{y} \vee z) \cdot \overline{(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})})}, \quad F_2 = \overline{(\bar{y} \vee x \vee z)} \vee \bar{x}y.$$

**Решение**. Преобразуем $F_1$.

$$F_1 = \overline{(x \vee \bar{y}) \vee ((x \vee \bar{y} \vee z) \cdot \overline{(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})})} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows} \overline{(x \vee \bar{y})} \cdot \overline{((x \vee \bar{y} \vee z) \cdot \overline{(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})})} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}, t_{\&}^{\mathrm{M}}, t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}y) \cdot (\overline{(x \vee \bar{y} \vee z)} \vee (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})) \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}, t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows} (\bar{x}y) \cdot (\bar{x}y\bar{z} \vee (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})) \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\vee}^{\mathrm{A}}, t_{\&}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}y) \cdot ((\bar{x} \vee \bar{x}(y\bar{z})) \vee y \vee \bar{z}) \overset{t^{\Pi}}{\mapsto} (\bar{x}y) \cdot (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \overset{t_{\&,\vee}^{\mathrm{D}}}{\rightrightarrows} (\bar{x}y)\bar{x} \vee (\bar{x}y)y \vee (\bar{x}y)\bar{z} \overset{t_{\&}^{\mathrm{K}}, t_{\&}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows}$$

$$\rightrightarrows (\bar{x}\bar{x})y \vee \bar{x}(yy) \vee \bar{x}y\bar{z} \overset{t_{\&}^{\mathrm{O}\Pi}}{\rightrightarrows} ((\bar{x}y) \vee (\bar{x}y)) \vee \bar{x}y\bar{z} \overset{t_{\vee}^{\mathrm{O}\Pi}}{\mapsto} \bar{x}y \vee (\bar{x}y)\bar{z} \overset{t^{\Pi}}{\mapsto} \bar{x}y.$$

Преобразуем $F_2$.

$$F_2 = \overline{(\bar{y} \vee x \vee z)} \vee \bar{x}y \overset{t_{\vee}^{\mathrm{M}}, t_{\neg}^{\mathrm{M}}}{\rightrightarrows} y\bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y \overset{t_{\vee}^{\mathrm{K}}, t_{\&}^{\mathrm{K}}, t_{\&}^{\mathrm{A}}}{\rightrightarrows} (\bar{x}y) \vee (\bar{x}y)\bar{z} \overset{t^{\Pi}}{\mapsto} \bar{x}y.$$

Таким образом, $F_1$ и $F_2$ эквивалентными преобразованиями приведены к одному и тому же виду, что и доказывает эквивалентность этих формул.

**3.9 (1).** Построить конечную полную систему тождеств для класса формул над базисом $B$, если $B = \{xy, x \oplus y, 1\}$.

**Решение**. Конечно, можно было бы воспользоваться теоремой 5.2 (теоремой перехода), изложенной на страницах 47–48 части 2 методических материалов по курсу «Основы кибкрнетики». Однако, мы предложим более короткое, хотя и более специальное решение данной задачи. Монотонной конъюнкцией называется формула, имеющая либо вид константы 1, либо вид элементарной конъюнкции булевых переменных. Полиномом Жегалкина называется формула над базисом $B$, имеющая либо вид $1 \oplus 1$, либо вид суммы по модулю 2 попарно неэквивалентных монотонных конъюнкций. Напомним, что у каждой булевой функции имеется, и притом ровно один (с точностью до порядка слагаемых и множителей в слагаемых) реализующий ее полином Жегалкина. Это позволяет считать полиномы Жегалкина каноническим видом в эквивалентных преобразованиях формул над базисом $B$, и строить полную систему тождеств, исходя из возможности использования тождеств на том или ином этапе приведения формул к каноническому виду. Опишем эти этапы для произвольной формулы над базисом $B$.

Этап 1. Раскрытие скобок (приведение формулы к виду суммы по модулю 2 конъюнкций переменных и констант 1). На этом этапе понадобятся такие тождества:

$$t^{\text{D}}_{\&,\oplus}: \ x_1 \cdot (x_2 \oplus x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3, \quad t^{\text{К}}_{\&}: \ x_1x_2 = x_2x_1$$

(второе тождество нужно для получения дистрибутивности, связанной с умножением справа суммы на переменную; в дальнейшем, если тождество содержится в системе $\tilde{\tau}^{\text{ОСН}}$, то мы будем упоминать лишь его название).

Этап 2. Приведение слагаемых к виду монотонных конъюнкций. На этом этапе понадобятся такие тождества:

$$t^{\text{К}}_{\&}, \ t^{\text{А}}_{\&}, \ t^{\text{ОП}}_{\&}, \ \hat{t}^{\text{ПК}}_{1,\&}: \ x_1 \cdot 1 = x_1.$$

Этап 3. Приведение суммы слагаемых к виду полинома Жегалкина. На этом этапе понадобятся такие тождества:

$$t^{\text{К}}_{\oplus}: \ x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1, \ t^{\text{А}}_{\oplus}: x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3,$$

$$t^{\text{ОП}}_{\oplus}: \ x_1 \oplus x_1 = 1 \oplus 1, \ t^{\text{ПК}}_{0,\oplus}: \ x_1 \oplus (1 \oplus 1) = x_1.$$

Из приведенных построений с очевидностью следует, что система тождеств $\tau_B = \{t^{\text{D}}_{\&,\oplus}, \ t^{\text{К}}_{\&}, \ t^{\text{А}}_{\&}, \ t^{\text{ОП}}_{\&}, \ \hat{t}^{\text{ПК}}_{1,\&}, \ t^{\text{К}}_{\oplus}, \ t^{\text{А}}_{\oplus}, \ t^{\text{ОП}}_{\oplus}, \ t^{\text{ПК}}_{0,\oplus}\}$ и является искомой конечной полной системой тождеств для формул над базисом $B$.

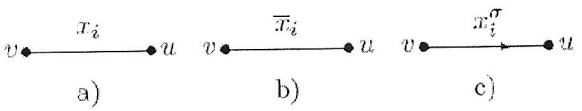
## Литература


1. Ложкин С.А. Лекции по основам кибернетики. — М.: МГУ, 2004. (Электронные версии лекций последних лет можно найти по адресу: `http://mk.cs.msu.ru/index.php/Основы_кибернетики_(3-й_поток)`)

2. Алексеев В.Б., Вороненко А.А., Ложкин С.А., Романов Д.С., Сапоженко А.А., Селезнева С.Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики». — М.: МГУ, 2011.

# Материалы к семинару № 4 по основам кибернетики: моделирование формул и π-схем, эквивалентные преобразования контактных схем (КС)

Рассмотрим класс контактных схем, в которых реализация ФАЛ осуществляется не с помощью преобразования входных значений в выходные, как это происходит, например, в схемах из функциональных элементов (см. §4), а в результате передачи значений по ребрам графа, проводимостью которого «управляют» входные БП. Ребро или дуга графа с пометкой $x_i$ ($\overline{x}_i$) называется *замыкающим* (соответственно *размыкающим*) контактом БП $x_i$ (см. рис. 6.1).




Считается, что контакт вида $x_i^\sigma$, $\sigma \in \{0,1\}$, проводит тогда и только тогда, когда $x_i = \sigma$, причем ориентированный контакт, то есть контакт, связанный с дугой, проводит только в соответствующем направлении.

Сеть $\Sigma$ с входами $a'_1, \ldots, a'_p$ и выходами $a''_1, \ldots, a''_q$, в которой все ребра (дуги) помечены переменными $x_1, \ldots, x_n$ или их отрицаниями $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$, называется $(p,q)$-*контактной схемой* (КС) *от БП* $x_1, \ldots, x_n$ и обозначается $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ или $\Sigma = \Sigma(x_1, \ldots, x_n; a'_1, \ldots, a'_p; a''_1, \ldots, a''_q)$. При этом число контактов называется *сложностью* КС $\Sigma$ и обозначается через $L(\Sigma)$. На рис. 6.3a–c показаны некоторые конкретные КС от БП $x_1, x_2, x_3$ с входом $a_1$ и выходами $a_2$, $a_3$.

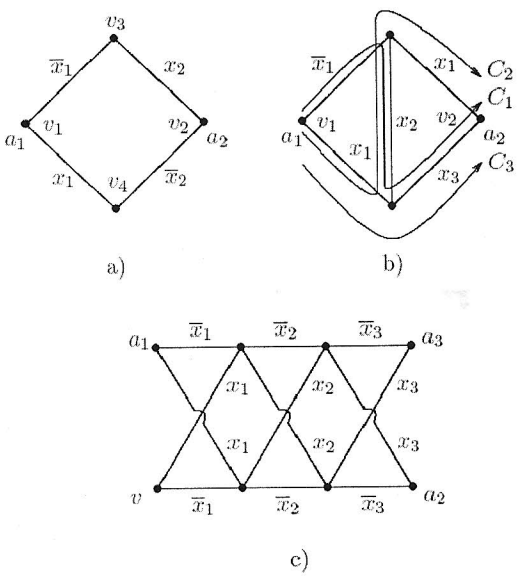



Рис. 6.3: некоторые КС от БП $x_1, x_2, x_3$

Пусть $\Sigma$ — КС от БП $X(n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор из $B^n$. Определим сеть $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из $\Sigma$ в результате удаления всех ребер (дуг) с пометками $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \ldots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе $\alpha$, и снятия пометок с остальных ребер $\Sigma$. Для вершин $v$ и $u$ КС $\Sigma$ введем *функцию проводимости от вершины $v$ к вершине $u$* как ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \ldots, x_n)$, которая равна 1 на наборе $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v-u)$-цепь, то есть тогда и только тогда, когда в $\Sigma$ имеется цепь из проводящих на наборе $\alpha$ контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из $v$ в $u$.

Рассмотрим теперь параллельно-последовательные или, иначе, $\pi$-схемы, которые являются частным случаем КС.

Простейшей $\pi$-схемой считается любая $(1,1)$-КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса (см. рис. 6.6a). Если $\pi$-схемы $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ уже определены, то $(1,1)$-КС $\Sigma'$ ($\Sigma''$), которая получается в результате их параллельного (соответственно последовательного) соединения (см. рис. 6.6b и 6.6c) тоже является $\pi$-схемой. Заметим, что при этом вход (выход) $\Sigma'$ является результатом отождествления входов (соответственно выходов) $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$, тогда как входом $\Sigma''$ является вход $\Sigma_1$, выходом $\Sigma''$ — выход $\Sigma_2$, а выход $\Sigma_1$ отождествляется с входом $\Sigma_2$ и становится внутренней вершиной $\Sigma''$. Легко видеть, что $\pi$-схема, показанная на рис. 6.6a, реализует ФАЛ $x_i^\sigma$, а $\pi$-схемы $\Sigma'$ и $\Sigma''$ (см. рис. 6.6b и 6.6c) — ФАЛ $f_1 \vee f_2$ и $f_1 \& f_2$ соответственно, где $f_1$ и $f_2$ — ФАЛ, реализуемые $\pi$-схемами $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ соответственно.

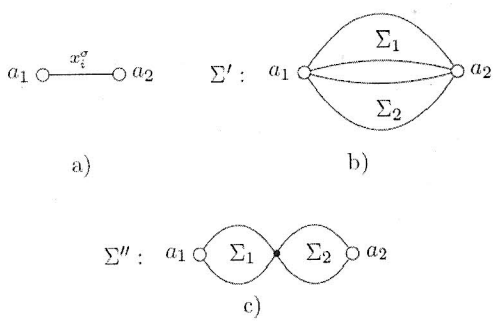



Рис. 6.6: к определению $\pi$-схемы

**Лемма 6.1.** *Любой $\pi$-схеме $\Sigma$ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}^\Phi$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.*

На рис 6.7a показана $\pi$-схема, которая реализует ФАЛ $H(x_1, x_2, x_3)$ и соответствует формуле:

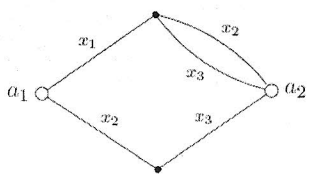
$$H(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2 x_3,$$

а на рис. 6.7b — $\pi$-схема, которая построена на основе контактного дерева и реализует ФАЛ $\mu_n$ — мультиплексорную

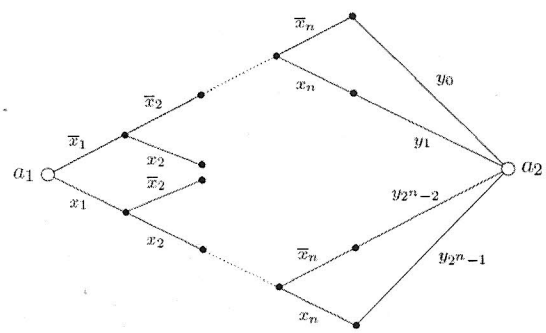
ФАЛ порядка $n$, — в соответствии с формулой

$$\mu_n\left(x_1,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_{2^n-1}\right) =$$
$$= \bigvee_{\sigma_1\in B} x_1^{\sigma_1}\left(\bigvee_{\sigma_2\in B} x_2^{\sigma_2}\left(\cdots\left(\bigvee_{\sigma_n\in B} x_n^{\sigma_n} y_{\nu(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)}\right)\cdots\right)\right).$$

Схема, моделирующая совершенную ДНФ ФАЛ $f$, называется *канонической* КС для этой ФАЛ.




a)




b)

Рис. 6.7: примеры $\pi$-схем

# Задача на эквивалентные преобразования КС

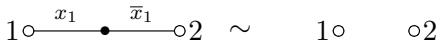
Коноводов В. А.

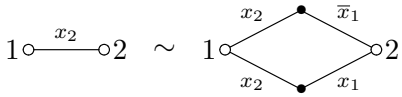
Схемы называются эквивалентными ($\Sigma_1 \sim \Sigma_2$), если реализуют одну и ту же функцию (или одни и те же функции между всеми парами полюсов).

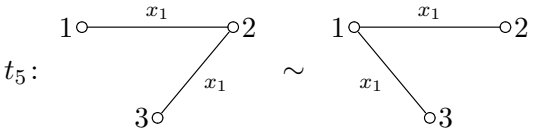
**Основные тождества.**

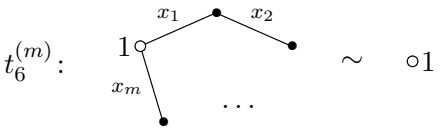
$t_1$: • ∼ ∅

$t_2$: 


$t_3$: 

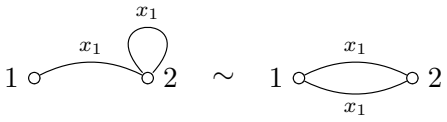

$t_4$: 


$t_5$: 

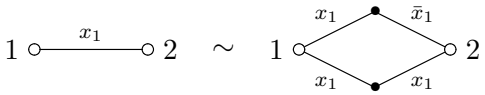

$t_6^{(m)}$: 


Если задано некоторое тождество, то это означает, что вместе с ним заданы тождества, полученные из него:

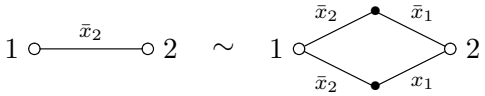
(1) одинаковой перенумерацией полюсов в обеих частях с возможным отождествлением, например, в тождестве $t_5$ можно отождествить полюса 2 и 3:



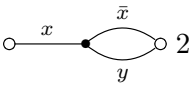

(2) переименованием переменных (в обеих частях тождества одинаковые переменные меняются на одинаковые), например, в тождестве $t_4$ можно $x_2$ заменить на $x_1$:

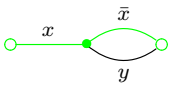


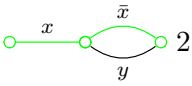

(3) заменой в обеих частях некоторых переменных на их отрицания, например, в тождестве $t_4$ можно заменить $x_2$ на $\bar{x}_2$:




*Какие подсхемы можно выделять?* Подсхема – это подграф, если говорить грубо. Но важно выделять правильно полюса подсхемы. Если в схеме вершина была полюсом, то она и останется полюсом в подсхеме. Если есть ребро из некоторой вершины подсхемы, идущее вовне этой подсхемы, то есть не принадлежащее ей, то вершина должна быть объявлена полюсом. Кроме того, любую вершину подсхемы можно объявить полюсом.

*Почему важно смотреть на полюса?* В схеме 

нельзя выделить подсхему 

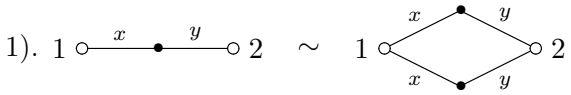
и применить тождество $t_3$, так как внутренняя вершина должна быть полюсом (из нее идет ребро, которое не принадлежит подсхеме) 

, а в тождестве $t_3$ внутренняя вершина – не полюс.

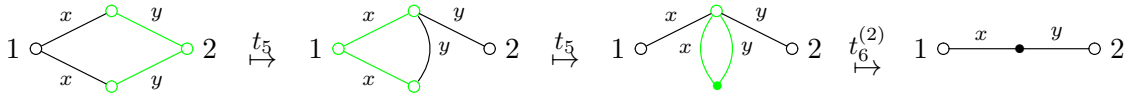
Эквивалентное преобразование состоит в применении тождеств — выделении подсхемы, соответствующей одной части тождества и замены ее на вторую часть. При этом внесенные пометки полюсов снимаются.

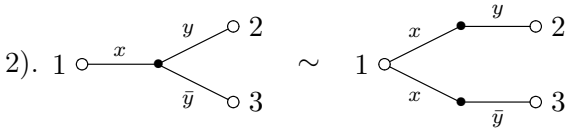
Бесконечная система тождеств $\{t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}, \ldots, t_6^{(m)}, \ldots\}$ является полной. Это означает, что для любых двух эквивалентных схем существует преобразование на основе этой системы тождеств, переводящее одну из них в другую. При этом *конечной* полной системы тождеств не существует.

**Примеры решения задач.** Во всех задачах требуется построить эквивалентное преобразование на основе системы основных тождеств, переводящее одну из схем в другую.

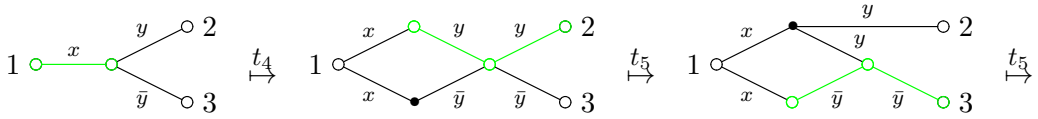
1). 

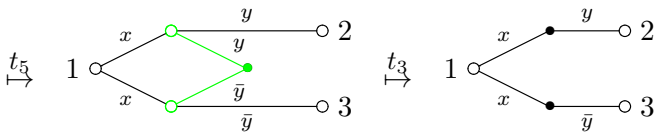
Решение:

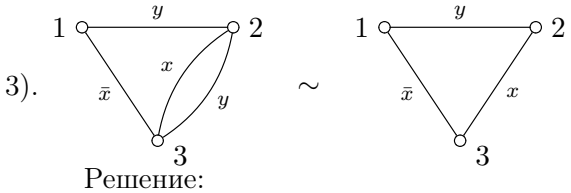


2). 

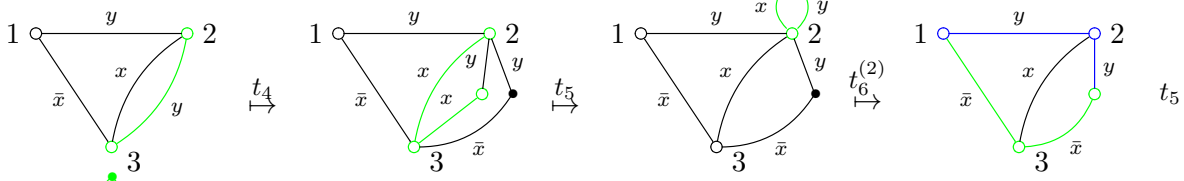
Решение:

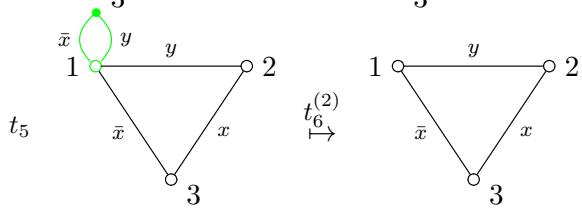




3). 

Решение:

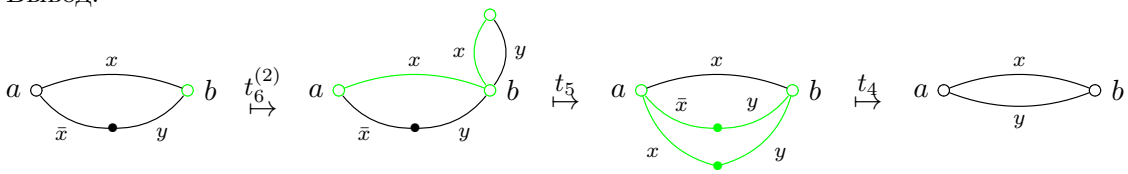




**Эквивалентности, вывод которых желательно помнить.**

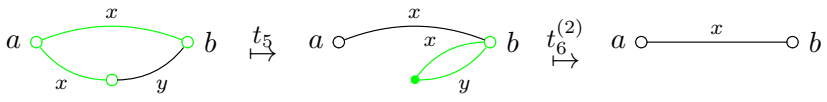
1). 

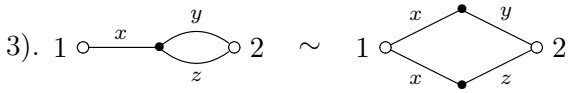
Вывод:



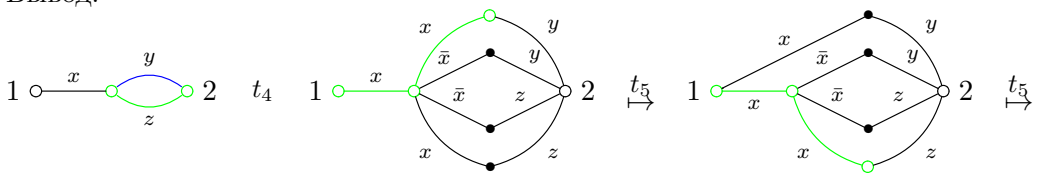
2). 

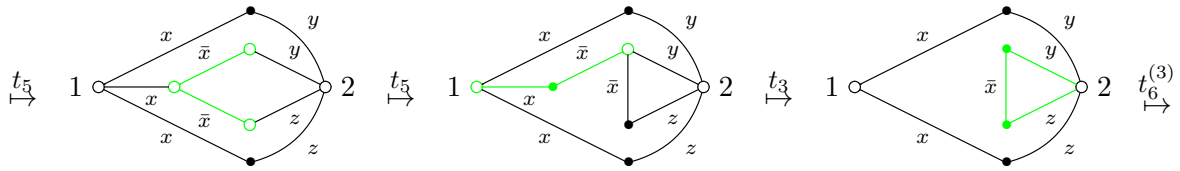
Вывод:

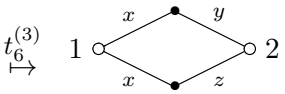


3). 

Вывод:







При решении сложных задач на первом этапе можно пользоваться этими эквивалентностями для нахождения нужного преобразования. Затем каждое из них расширить, подставив вывод, либо вывести их отдельно.

***Нахождение необходимых тождеств.** Справедлив следующий факт – для любых двух эквивалентных контактных схем, реализующих функции от $n$ переменных, существует эквивалентное преобразование на основе **только** тождеств $t_1, \dots, t_5, t_6^{(1)}, \dots, t_6^{(n)}$.

Цикломатическим числом графа $G = (V(G), E(G))$ называется величина

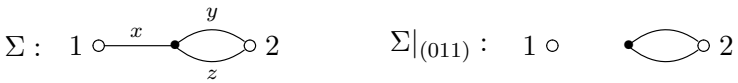
$$\theta(G) = |E(G)| - |V(G)| + |c(G)|,$$

то $|c(G)|$ – число компонент связности этого графа. Быстро считать цикломатическое число в простейших случаях помогают свойства:

(1) Цикломатическое число графа без циклов равно 0.
(2) Цикломатическое число графа с одним простым циклом равно 1.

Пусть $\Sigma$ — КС, для каждого набора $\alpha$ значений переменных, управляющих ее контактами, определим граф $\Sigma|_\alpha$ — граф, полученный из графа $\Sigma$ удалением тех ребер, которые не проводят на наборе $\alpha$.

Например для набора (011) значений переменных $(xyz)$ :



Цикломатическое число схемы $\Sigma$

$$\theta(\Sigma) = \sum_{\alpha \in B^n} \theta(\Sigma|_\alpha).$$

Цикломатическое число схемы обладает следующими свойствами:

(1) После эквивалентного преобразования на основе тождеств $t_1 - t_5$ цикломатическое число любой КС не изменяется.
(2) Если $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ — две КС, реализующие функции от $n$ переменных, таковы, что $\Sigma_2$ получается из $\Sigma_1$ эквивалентным преобразованием на основе только тождеств $t_1, \dots, t_5, t_6^{(1)}, \dots, t_6^{(k)}$, $k < n$, то величина $|\theta(\Sigma_1) - \theta(\Sigma_2)|$ делится на $2^{n-k}$.

С помощью этих свойств решается следующая задача.

**Пример.** *Даны две эквивалентные КС:*



*Указать минимальное такое $i$, при котором эквивалентное преобразование $\Sigma_1 \ \Sigma_2$ возможно с использованием тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, \ldots, t_6^{(i)}$.*

Так как реализуемые функции зависят от $n = 3$ переменных, то с помощью тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}, t_6^{(3)}$ заведомо можно произвести такое эквивалентное преобразование.

Для решения задачи найдем цикломатические числа схем.

Схема $\Sigma_1$. Если $x_1 = 1$, то контакт $\bar{x}_1$ не проводит, а потому единственный цикл возможен только на одном наборе (111), когда проводят контакты $x_2$ и $x_3$, на остальных наборах$\alpha$ с $x_1 = 1$ граф $\Sigma_1|_\alpha$ не содержит циклов, и потому его цикломатическое число 0. Аналогично при $x_1 = 0$ только в случае набора (011) граф содержит цикл. Получаем, что

$$\theta(\Sigma_1) = \theta(\Sigma_1|_{(111)}) + \theta(\Sigma_1|_{(011)}) = 1 + 1 = 2.$$

Схема $\Sigma_2$. При всех наборах $\alpha$, кроме (011), соответствующий граф $\Sigma_2|_\alpha$ не содержит циклов, а граф $\Sigma_2|_\alpha$ состоит из единственного цикла, потому

$$\theta(\Sigma_2) = \theta(\Sigma_2|_{(011)}) = 1.$$

$|\theta(\Sigma_1) - \theta(\Sigma_2)| = 1$. Если бы эквивалентное преобразование $\Sigma_1 \ \Sigma_2$ было возможно с использованием только тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}$, то указанная величина, равная 1, делилась бы на $2^{n-1} = 4$, что неверно.

Аналогично, если бы это преобразование было возможно с использованием только тождеств $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}$, то эта единица делилась бы на $2^{n-2} = 2$, что тоже неверно.

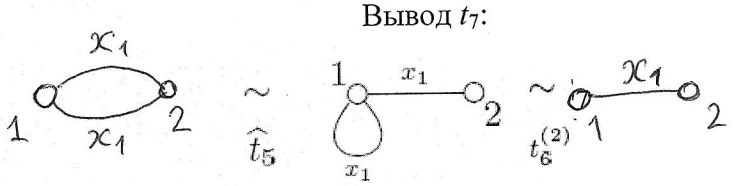
Как уже было сказано, указанное преобразование можно произвести с использованием $t_1, \ldots, t_5, t_6^{(1)}, t_6^{(2)}, t_6^{(3)}$, потому ответ на задачу $i = 3$.

Вывод некоторых тождеств:

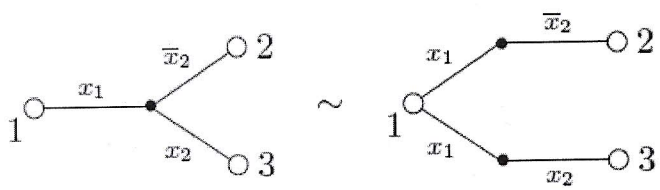
$t_7$ :



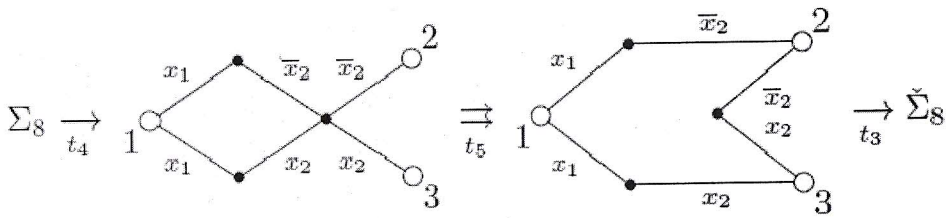

Вывод $t_7$:




$t_8$ :



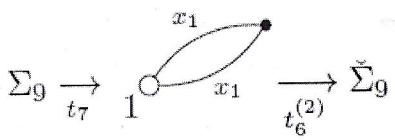

Вывод $t_8$:



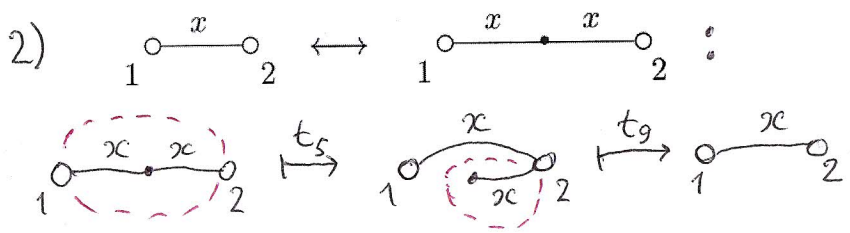

$t_9$ :



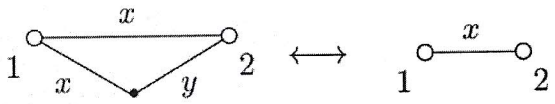

Вывод $t_9$:

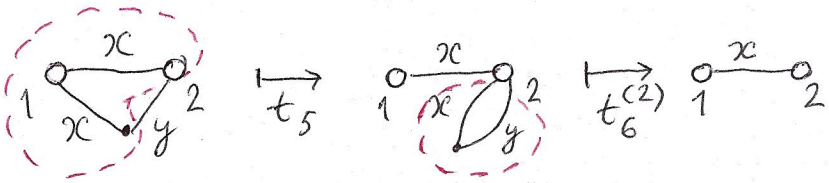



**4.1.** При помощи эквивалентных преобразований $t_1 - t_5, t_6^{(m)} (m = 1, 2, \ldots)$ доказать эквивалентность схем:

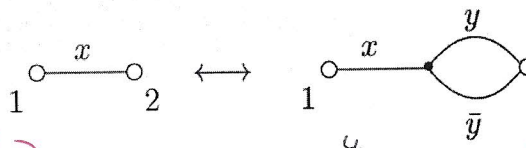


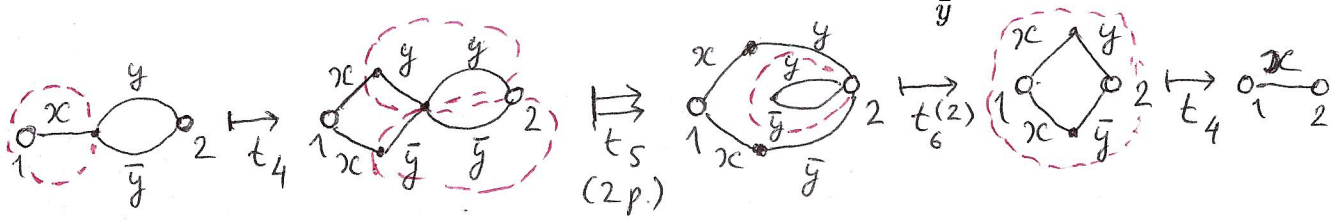
4)



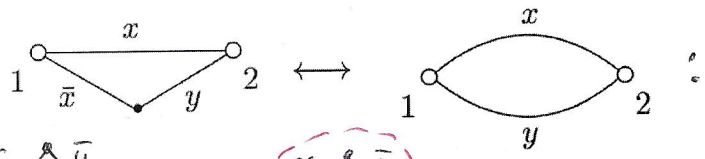


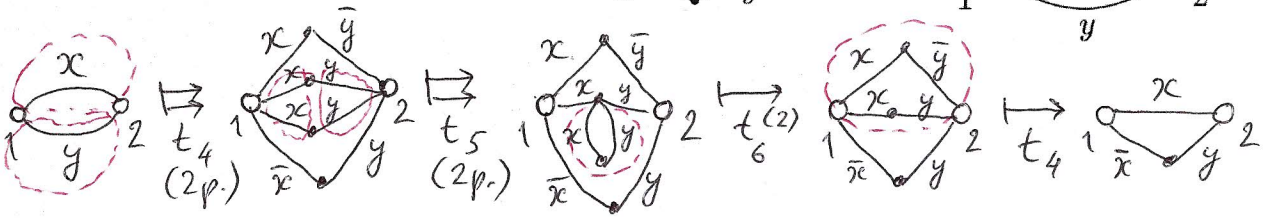
6)



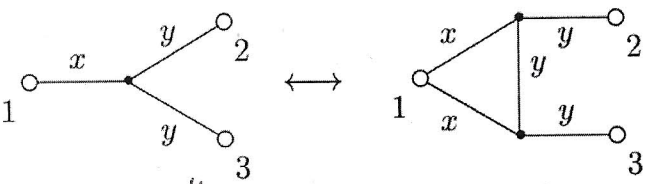


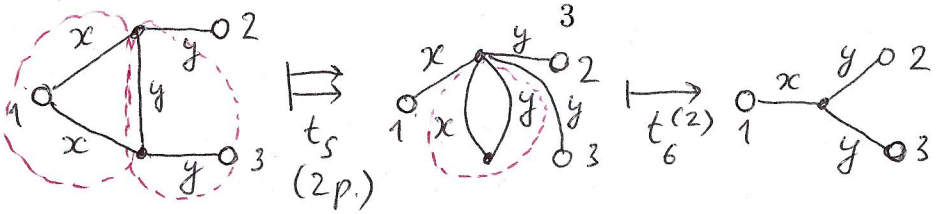
7)



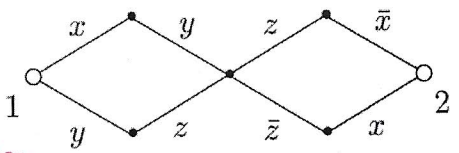


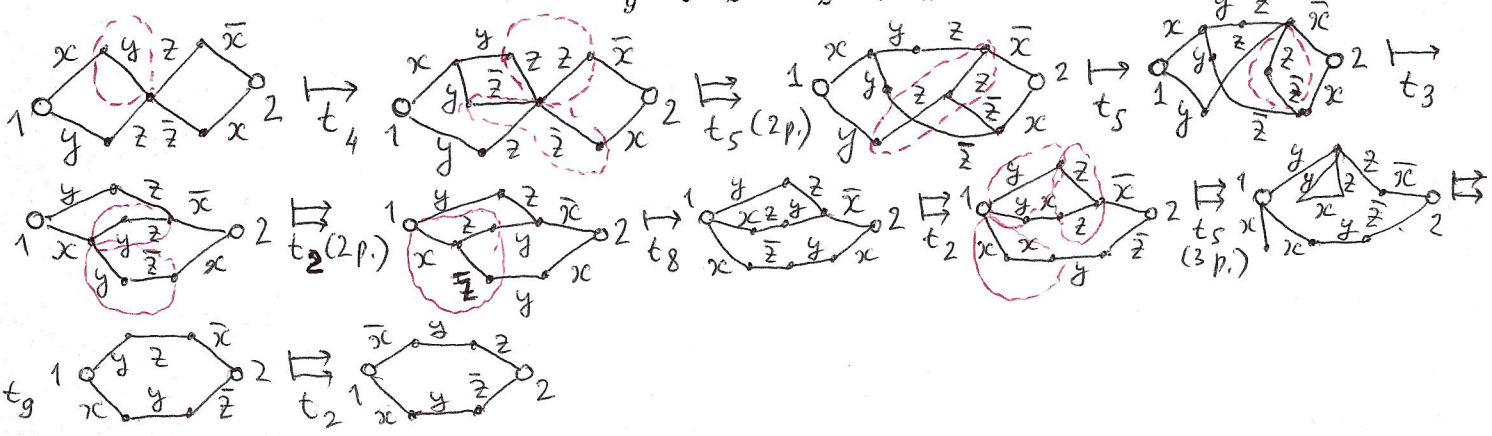
8)





9) Привести к каноническому виду контактную схему





**Решение задач семинара № 5 по курсу "Основы кибернетики" для групп 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ. Тема: "Сложность булевых функций и методы синтеза схем на основе ДНФ"**

На этом занятии речь пойдет о построении схем из функциональных элементов (СФЭ) и контактных схем (КС), реализующих булевы функции.

Напомним, что сложностью СФЭ $S'$ называется число $L(S')$ функциональных элементов в ней, а сложностью КС $S''$ называется число $L(S'')$ контактов в ней.

Под сложностью реализации системы булевых функций $F$ в классе СФЭ над базисом $B$ понимается величина

$$L_B^{\mathrm{C}}(F) = \min_{\text{СФЭ } S \text{ над } B,\ \text{реализ. } F} L(S).$$

Если $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, то нижний индекс в $L_B^{\mathrm{C}}(F)$ не пишется.

Аналогично, под сложностью реализации системы булевых функций $F$ в классе КС понимается величина

$$L^{\mathrm{KC}}(F) = \min_{\text{КС } S,\ \text{реализ. } F} L(S).$$

В основе построения схем, изучаемых на этом занятии, лежат формульные представления функций в виде ДНФ или КНФ, которые, возможно, подверглись дальнейшим преобразованиям.

Для получения нижних оценок сложности схем могут оказаться полезными следующие утверждения.

**Утверждение 16.1** *Если булева функция (БФ) $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих БП, то*

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geq n - 1, \qquad L^{\mathrm{K}}(f) \geq n.$$

*Если при этом БФ $f$ не является монотонной БФ (каждая БП $x_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, не является ни монотонной, ни инмонотонной БП БФ $f$), то*

$$L^{\mathrm{C}}(f) \geq n \qquad (\textit{соответственно } L^{\mathrm{K}}(f) \geq n + k).$$

**Утверждение 16.2** *Для системы $F = (f_1, \ldots, f_m)$, состоящей из попарно различных БФ, отличных от констант (от переменных), справедливо неравенство*

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geq m \qquad (\textit{соответственно } L_B^{\mathrm{C}}(F) \geq m).$$

**Утверждение 16.3** *Если для существенной БП $x_n$ БФ $f$, $f \in P_2(n)$, и для любого (некоторого) $\sigma$, $\sigma \in B$, БФ $f|_{x_n=\sigma} = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sigma) \not\equiv 0, 1$, то*

$$L_{\&,\vee}^{C}(f) \geq \min\{L_{\&,\vee}^{C}(f|_{x_n=0}), L_{\&,\vee}^{C}(f|_{x_n=1})\} + 2$$
$$\Big(\textit{соответственно } L_{\&,\vee}^{C}(f) \geq L_{\&,\vee}^{C}(f|_{x_n=\sigma}) + 1\Big).$$

**Утверждение 16.4** *Если система БФ* $F = (f_1, \ldots, f_m)$ *состоит из попарно различных БФ от БП* $X(n)$*, отличных от* 0 *и* 1*, то*

$$L^{\mathrm{K}}(F) \geqslant 2^{1-n} \sum_{j=1}^{m} |N_{f_j}|.$$

Пронумерованные задачи взяты (в ряде случаев — с незначительными модификациями) из главы X задачника [1].

**1.1(2).** Для булевой функции $x \sim y$ построить схему из функциональных элементов (СФЭ) сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и контактную схему (КС) сложности 4. Доказать минимальность построенных схем.

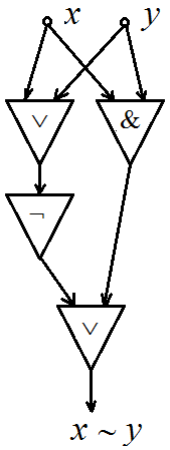



Рис. 1.

**Решение**. 1) СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $x \sim y$, приведена на рис. 1 и моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$x \sim y = \bar{x}\bar{y} \vee xy = \overline{(x \vee y)} \vee xy$$

(некоторая экономия достигается за счет применения правила де Моргана).

Докажем минимальность этой схемы, т. е. докажем, что $L^{\mathrm{C}}(x \sim y) \geq 4$.

*I способ.* Очевидно, в любой минимальной СФЭ $S$ в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующей $x \sim y$, найдется двухвходовый функциональный элемент $E$, к которому от каждого входа схемы ведет либо дуга, либо ориентированный путь длины 2, промежуточная вершина которого есть инвертор.

Покажем, что в $S$ найдется по крайней мере 3 различных двухвходовых элемента.

Заметим: в $S$ найдется отличный от $E$ двухвходовый функциональный элемент $E'$, к которому от входа $y$ схемы ведет либо дуга, либо ориентированный путь длины 2, промежуточная вершина которого есть инвертор (иначе можно так подобрать значение $x$, чтобы значение на выходе элемента $E$, и, следовательно, значение на выходе всей схемы не зависело от значения $y$, но это противоречило бы тому, что схема реализует функцию $x \sim y$).

Аналогично (в силу симметричности БФ $x \sim y$), в $S$ найдется отличный от $E$ двухвходовый функциональный элемент $E''$ (возможно, совпадающий с $E'$), к которому от входа $x$ схемы ведет либо дуга, либо ориентированный путь длины 2, промежуточная вершина которого есть инвертор.

Таким образом, в построенной части схемы $S$ или уже́ имеется 3 двухвходовых элемента ($E$, $E'$, $E''$), или имеется 2 двухвходовых элемента ($E$, $E'$), ко всем входам которых ведут дуги в этой части схемы. В последнем случае надлежит добавить еще хотя бы один двухвходовый элемент, чтобы в схеме имелся ориентированный путь от каждого элемента $E$, $E'$ к выходу схемы.

Значит, в $S$ найдется по крайней мере 3 различных двухвходовых элемента.

Вспоминая, что функция $x \sim y$ не является монотонной, заключаем: кроме трех двухвходовых элементов, в $S$ должен быть и по крайней мере один инвертор.

Следовательно, $L^{\mathrm{C}}(x \sim y) \geq 4$, ч. т. д.

*II способ.* Заметим, что в силу принципа двойственности:

$$L^{\mathrm{C}}(x \oplus y) = L^{\mathrm{C}}(x \sim y), \tag{1}$$

ибо $x \oplus y = (x \sim y)^*$. Предположим, что $L^{\mathrm{C}}(x \sim y) \leq 3$, и пусть $S$ — минимальная схема, реализующая одну из функций $x \oplus y$, $x \sim y$. Заметим: выходной элемент схемы $S$ в силу ее минимальности не может быть инвертором, так как иначе на выходе элемента, выход которого подается на вход этого инвертора, реализуется другая из функций $x \oplus y$, $x \sim y$ (поскольку $x \oplus y = \overline{(x \sim y)}$), — противоречие с равенством (1). Значит, выходной элемент $E$ схемы $S$ — двухвходовый. С учетом принципа двойственности можно, не ограничивая общности, считать, что $E$ — конъюнктор. Невозможно, чтобы на какой-то вход $E$ подавалась бы дуга, ведущая от входа схемы: допустим, ко входу $E$ ведет дуга от входа $x$, тогда, полагая $x = 0$, получаем, что, независимо от значения $y$, на выходе $S$ возникает 0, но тогда $S$ не может реализовать ни $x \oplus y$, ни $x \sim y$. Также невозможен (в силу минимальности $S$) случай подачи на входы $E$ дуг, ведущих от одного функционального элемента. Значит, ко входам $E$ ведут дуги от разных элементов $E'$, $E''$. Но тогда в $S$ уже имеется 3 элемента. Заметим: обе функции $x \oplus y$, $x \sim y$ — немонотонные. Поэтому хотя бы один из элементов $E'$, $E''$ — инвертор, и к его входу ведет дуга от входа схемы, — допустим, от входа $x$. Тогда, полагая $x = 1$, увидим: независимо от значения $y$, на выходе $S$ возникает 0, но в этом случае $S$ не может реализовать ни $x \oplus y$, ни $x \sim y$. Противоречие. Значит, $L^{\mathrm{C}}(x \sim y) \geq 4$, ч. т. д.

2) КС сложности 4, реализующая функцию $x \sim y$, приведена на рис. 2 и моделирует формулу $\bar{x}\bar{y} \vee xy$.

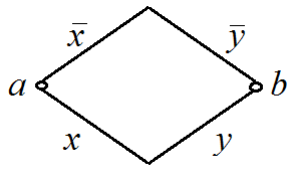



Рис. 2.

Минимальность этой схемы легко устанавливается на основании следующего утверждения (см. утв. 16.1): *если у булевой функции $f$ имеется $n$ существенных переменных, и среди них есть $k$ переменных, по каждой из которых эта функция немонотонна и не инмонотонна (т. е. не антимонотонна), то $L^{\mathrm{KC}}(f) \geq n + k$.*

Заметим: у функции $x \sim y$ имеется 2 существенных переменных, по каждой из которых эта функция немонотонна и не инмонотонна, значит, $L^{\mathrm{KC}}(x \sim y) \geq 2 + 2 = 4$, ч. т. д.

**1.1(3).** Для булевой функции $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ построить СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и КС сложности 5. Доказать минимальность построенных схем.

**Решение**. 1) СФЭ сложности 4 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $m(x_1, x_2, x_3)$, моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$$

(некоторая экономия достигается за счет применения тождества дистрибутивности).

Докажем минимальность этой схемы, т. е. докажем, что $L^{\mathrm{C}}(m) \geq 4$.

Предположим, что $L^{\mathrm{C}}(m) \leq 3$, и пусть $S$ — минимальная схема, реализующая функцию $m$.

Пусть $E$ — ближайший к выходу схемы двухвходовый элемент схемы $S$ (т. е. либо $E$ — выходной элемент, либо от $E$ к выходу схемы ведет цепочка инверторов). С учетом принципа двойственности, а также самодвойственности функции $m$ можно, не ограничивая общности, считать, что $E$ — конъюнктор.

Невозможно, чтобы на какой-то вход $E$ подавалась бы дуга, ведущая от входа схемы: допустим, ко входу $E$ ведет дуга от входа $x_i$, тогда, полагая $x_i = 0$, получаем, что, независимо от значений двух других переменных, на выходе $S$ возникает одно и то же значение, но тогда $S$ не может реализовывать $m(x_1, x_2, x_3)$.

Также невозможен (в силу минимальности $S$) случай подачи на входы $E$ дуг, ведущих от одного функционального элемента.

Значит, ко входам $E$ ведут дуги от разных элементов $E'$, $E''$. Но тогда в $S$ уже имеется 3 элемента $E$, $E'$, $E''$. Это означает, что других элементов в схеме нет, а элемент $E$ — выходной элемент схемы.

Ни один из элементов $E'$, $E''$ не может быть инвертором. Действительно, пусть, не ограничивая общности, $E'$ — инвертор, на вход которого подается переменная $x_i$. Тогда, полагая $x_i = 1$, заметим: значение на выходе схемы $S$ равно 0 независимо от значений остальных переменных. Но такая схема $S$ не может реализовывать функцию $m$.

Ни один из элементов $E'$, $E''$ не может быть конъюнктором. Действительно, пусть, не ограничивая общности, $E'$ — конъюнктор, на один из входов которого подается переменная $x_i$. Тогда, полагая $x_i = 0$, заметим: значение на выходе схемы $S$ равно 0 независимо от значений остальных переменных. Но такая схема $S$ не может реализовывать функцию $m$.

Значит, оба элемента $E'$, $E''$ — дизъюнкторы. У этих элементов в совокупности имеется 4 входа, а булева функция $m$ зависит от 3 переменных. Следовательно, по крайней мере одна переменная, — скажем, $x_i$, — подается по крайней мере на 2 из 4 входов элементов $E'$, $E''$. Если среди таких входов имеются два входа одного элемента, то этот элемент выполняет роль тождественной функции, и его можно было бы удалить из схемы, что противоречит минимальности схемы $S$. Если же имеет место иная ситуация, то, полагая $x_i = 1$, получим на выходе схемы значение 1 независимо от значений других переменных. Но в этом случае $S$ не может реализовывать функцию $m$. Противоречие. Значит, $L^{\mathrm{C}}(m) \geq 4$, ч. т. д.

2) КС сложности 5, реализующая функцию $m$, моделирует формулу $x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_2x_3$.

Установим минимальность этой схемы. Предположим, что $L^{\mathrm{KC}}(m) \leq 4$, и пусть $S$ — минимальная двухполюсная КС, реализующая функцию $m$.

Оказывается, никакой контакт в $S$ не может соединять два полюса схемы. Действительно, если бы такой контакт $x_i^\sigma$ ($i \in \{1, 2, 3\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$) нашелся бы, то схема проводила бы всякий раз, когда $x_i = \sigma$, но в этом случае она не могла бы реализовывать функцию $m$.

Аналогично, в $S$ нет полюса, которому был бы инцидентен ровно один контакт. Действительно, если бы такой полюс существовал и ему был бы инцидентен контакт

$x_i^\sigma$ ($i \in \{1,2,3\}$, $\sigma \in \{0,1\}$), то схема не проводила бы всякий раз, когда $x_i = \bar{\sigma}$, но в этом случае она не могла бы реализовывать функцию $m$.

Теперь ясно, что, в силу предположения $L(S) \le 4$, схема $S$ моделирует либо формулу $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \vee x_{i_3}^{\sigma_3} x_{i_4}^{\sigma_4}$ (рис. 3), либо формулу $(x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2})(x_{i_3}^{\sigma_3} \vee x_{i_4}^{\sigma_4})$ (рис. 4), $i_j \in \{1,2,3\}$, $\sigma_j \in \{0,1\}$, $j = \overline{1,3}$.

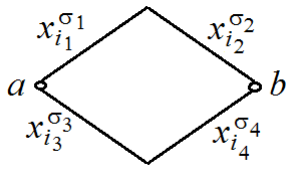



Рис. 3.

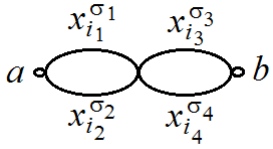



Рис. 4.

Рассмотрим сначала случай моделирования схемой $S$ формулы $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \vee x_{i_3}^{\sigma_3} x_{i_4}^{\sigma_4}$. В силу минимальности этой схемы $i_1 \ne i_2$, $i_3 \ne i_4$.

Если бы существовало число $j$, $j \in \{1,2,3\}$, такое, что $\sigma_j = 0$, то схема $S$ не могла бы реализовывать функцию $m$. Действительно, пусть, например, $j = 1$ и $\sigma_1 = 0$. Тогда схема проводит всякий раз, когда $x_{i_1} = 0$ и $x_{i_2} = \sigma_2$, что невозможно.

Следовательно, схема $S$ моделирует формулу $x_{i_1} x_{i_2} \vee x_{i_3} x_{i_4}$. Поскольку $m(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит ровно от 3 переменных, имеем: найдутся неравные друг другу $k$, $l$ (лежащие в множестве $\{1,2,3\}$) такие, что $i_k = i_l$. Но тогда при $x_{i_k} = 0$ схема $S$ не проводит, и, значит, не реализует функцию $m$.

Остается рассмотреть случай моделирования схемой $S$ формулы $(x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2})(x_{i_3}^{\sigma_3} \vee x_{i_4}^{\sigma_4})$. В силу минимальности этой схемы $i_1 \ne i_2$, $i_3 \ne i_4$.

Если бы существовало число $j$, $j \in \{1,2,3\}$, такое, что $\sigma_j = 0$, то схема $S$ не могла бы реализовывать функцию $m$. Действительно, пусть, например, $j = 1$ и $\sigma_1 = 0$. Тогда схема не проводит всякий раз, когда $x_{i_1} = 1$ и $x_{i_2} = \bar{\sigma}_2$, что невозможно.

Следовательно, схема $S$ моделирует формулу $(x_{i_1} \vee x_{i_2})(x_{i_3} \vee x_{i_4})$. Поскольку $m(x_1, x_2, x_3)$ существенно зависит ровно от 3 переменных, имеем: найдутся неравные друг другу $k$, $l$ (лежащие в множестве $\{1,2,3\}$) такие, что $i_k = i_l$. Но тогда при $x_{i_k} = 1$ схема $S$ проводит, и, значит, не реализует функцию $m$.

Итак: схема $S$ сложности не более 4 не может реализовывать функцию $m$, поэтому $L^{\mathrm{KC}}(m) \ge 4$, ч. т. д.

**1.1(4).** Для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3) = (01111110)$ построить СФЭ сложности 6 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ и КС сложности 6. Доказать минимальность построенной КС.

**Решение**. 1) СФЭ сложности 6 в базисе $B = \{xy, x \vee y, \bar{x}\}$, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\overline{(x_1 x_2 x_3)}$$

(некоторая экономия достигается за счет применения правила де Моргана).

2) КС сложности 6, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует формулу $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$.

Минимальность этой схемы легко устанавливается на основании уже́ упоминавшегося утверждения (см. утв. 16.1): *если у булевой функции $f$ имеется $n$ существенных переменных, и среди них есть $k$ переменных, по каждой из которых эта функция немонотонна и не инмонотонна (т. е. не антимонотонна), то $L^{\mathrm{KC}}(f) \ge n + k$.*

Заметим: у функции $f$ имеется 3 существенных переменных, по каждой из которых эта функция не монотонна и не инмонотонна. В силу симметричности функции $f$ этот факт достаточно установить для переменной $x_1$. Поскольку $f(0,0,0) = 0$ и

$f(1,0,0)=1$, функция $f$ не инмонотонна по переменной $x_1$. Поскольку $f(1,1,1)=0$ и $f(0,1,1)=1$, функция $f$ не монотонна по переменной $x_1$. Значит, $L^{\mathrm{KC}}(f)\geq 3+3=6$, ч. т. д.

**Задача.** Для мультиплексорной функции порядка 1 $\mu_1(x_1,y_0,y_1)=\bar{x}_1y_0\vee x_1y_1$ построить минимальную СФЭ в базисе $B=\{xy,x\vee y,\bar{x}\}$ и минимальную КС. Обосновать минимальность построенных схем.

**Решение**. 1) СФЭ сложности 4 в базисе $B=\{xy,x\vee y,\bar{x}\}$, реализующая функцию $\mu_1(x_1,y_0,y_1)$, моделирует формулу $\bar{x}_1y_0\vee x_1y_1$.

Докажем минимальность этой схемы, т. е. докажем, что $L^{\mathrm{C}}(\mu_1)\geq 4$.

*I способ*. Заметим:

$$\mu_1|_{y_0=0}=\mu_1(x_1,0,y_1)=x_1y_1\not\equiv\mathrm{const},\ \mu_1|_{y_0=1}=\mu_1(x_1,1,y_1)=\bar{x}_1\vee y_1\not\equiv\mathrm{const}.$$

Значит, по утв. 16.3:

$$L^{\mathrm{C}}_{\&,\vee}(\mu_1)\geq\min\{L^{\mathrm{C}}_{\&,\vee}(\mu_1|_{y_0=0}),L^{\mathrm{C}}_{\&,\vee}(\mu_1|_{y_0=1})\}+2\geq 3,$$

откуда с учетом немонотонности функции $\mu_1$ и необходимости добавления инвертора и вытекает нижняя оценка $L^{\mathrm{C}}(\mu_1)\geq 4$.

*II способ*. Предположим, что $L^{\mathrm{C}}(\mu_1)\leq 3$, и пусть $S$ — минимальная схема, реализующая функцию $\mu_1$.

Пусть $E$ — ближайший к выходу схемы двухвходовый элемент схемы $S$ (т. е. либо $E$ — выходной элемент, либо от $E$ к выходу схемы ведет цепочка инверторов).

Невозможно, чтобы на какой-то вход $E$ подавалась бы дуга, ведущая от входа схемы: допустим, ко входу $E$ ведет дуга от входа $x_i$, тогда, полагая $x_i=0$ для случая, когда $E$ — конъюнктор, и полагая $x_i=1$ для случая, когда $E$ — дизъюнктор, получаем, что на выходе $S$ возникает одно и то же значение независимо от значений двух других переменных, но тогда $S$ не может реализовывать $\mu_1$.

Также невозможен (в силу минимальности $S$) случай подачи на входы $E$ дуг, ведущих от одного функционального элемента.

Значит, ко входам $E$ ведут дуги от разных элементов $E'$, $E''$. Но тогда в $S$ уже имеется 3 элемента $E$, $E'$, $E''$. Это означает, что других элементов в схеме нет, а элемент $E$ — выходной элемент схемы.

Ни один из элементов $E'$, $E''$ не может быть инвертором. Действительно, пусть, не ограничивая общности, $E'$ — инвертор, на вход которого подается переменная $x_i$. Тогда, полагая $x_i=1$ для случая, когда $E$ — конъюнктор, и полагая $x_i=0$ для случая, когда $E$ — дизъюнктор, заметим: значение на выходе схемы $S$ фиксировано независимо от значений остальных переменных. Но такая схема $S$ не может реализовывать функцию $\mu_1$.

Но в этом случае получаем, что функция, реализуемая схемой $S$, — монотонная, в отличие от $\mu_1$. (Немонотонность $\mu_1$ следует из того, что $\mu_1(0,1,0)=1$ и $\mu_1(1,1,0)=0$). Противоречие. Значит, $L^{\mathrm{C}}(\mu_1)\geq 4$, ч. т. д.

2) КС сложности 4, реализующая функцию $f(x_1,x_2,x_3)$, моделирует формулу $\bar{x}_1y_0\vee x_1y_1$.

Заметим: у функции $\mu_1$ имеется 3 существенных переменных, по одной из которых ($x_1$) эта функция не монотонна и не инмонотонна. (Поскольку $\mu_1(0,1,0)=1$ и $\mu_1(1,1,0)=0$, функция $\mu_1$ не монотонна по переменной $x_1$. Поскольку $\mu_1(0,0,1)=0$ и $\mu_1(1,0,1)=1$, функция $\mu_1$ не инмонотонна по переменной $x_1$). Значит, по утв. 16.1: $L^{\mathrm{KC}}(\mu_1)\geq 3+1=4$, ч. т. д.

**Задача.** Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee (\bar{x}_1 \vee x_2)x_4$ построить минимальную КС. Обосновать минимальность этой схемы.

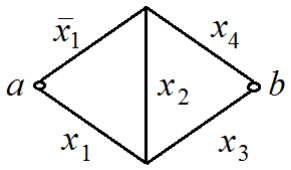



Рис. 5.

**Решение**. КС сложности 5, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, приведена на рис. 5.

Заметим: у функции $f$ имеется 4 существенных переменных, по одной из которых ($x_1$) эта функция не монотонна и не инмонотонна. (Поскольку $f(0,0,0,1) = 1$ и $f(1,0,0,1) = 0$, функция $f$ не монотонна по переменной $x_1$. Поскольку $f(0,0,1,0) = 0$ и $f(1,0,1,0) = 1$, функция $f$ не инмонотонна по переменной $x_1$). Значит, по утв. 16.1: $L^{\text{КС}}(f) \geq 4 + 1 = 5$, ч. т. д.

**2.4(1).** Для функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2x_3$ построить минимальную КС. Обосновать минимальность этой схемы.

**Решение**. КС сложности 6, реализующая функцию $f(x_1, x_2, x_3)$, моделирует последнюю формулу в цепочке равенств:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2x_3 = \bar{x}_1(x_2x_3) \vee x_1\overline{(x_2x_3)} = \bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3).$$

Заметим: у функции $f$ имеется 3 существенных переменных, по каждой из которых эта функция не монотонна и не инмонотонна. (Поскольку $f(0,0,0) = 0$ и $f(1,0,0) = 1$, функция $f$ не инмонотонна по переменной $x_1$. Поскольку $f(0,1,1) = 1$ и $f(1,1,1) = 0$, функция $f$ не монотонна по переменной $x_1$. Поскольку $f(0,0,1) = 0$ и $f(0,1,1) = 1$, функция $f$ не инмонотонна по переменной $x_2$. Поскольку $f(1,0,1) = 1$ и $f(1,1,1) = 0$, функция $f$ не монотонна по переменной $x_2$. Поскольку $f(0,1,0) = 0$ и $f(0,1,1) = 1$, функция $f$ не инмонотонна по переменной $x_3$. Поскольку $f(1,1,0) = 1$ и $f(1,1,1) = 0$, функция $f$ не монотонна по переменной $x_3$). Значит, по утв. 16.1: $L^{\text{КС}}(f) \geq 3 + 3 = 6$, ч. т. д.

## Литература


1. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

**Решение задач семинара №6 по курсу "Основы кибернетики"**
**для групп 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ.**
**Каскадные КС и СФЭ. Метод каскадов для КС и СФЭ.**

**Задача №2.13(1)**

Построить методом каскадов контактную схему (КС) для функции $f(\tilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus 1$.

**Решение:**

Руководствуясь естественным порядком переменных, разложим по Шеннону сначала саму ФАЛ $f$ по её первой переменной, и далее продолжим раскладывать её подфункции по последующим переменным. Пусть $G_1 = \widehat{G}_1 = \{f\}$ — исходное множество функций, для которых методом каскадов нужно построить схемы. Разложение Шеннона функции $f$ по переменной $x_1$ выглядит так:

$$f(\tilde{x}^3) = \overline{x}_1 \cdot f(0, x_2, x_3) \vee x_1 \cdot f(1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \cdot (x_2x_3 \oplus 1) \vee x_1 \cdot 1$$

Введём удобные обозначения. Пусть $k$ и $n$ натуральные числа, $k \leqslant n$, функция $g$ — ФАЛ из $P_2(n)$, $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — двоичный набор длины $k$. Будем далее обозначать функцию $g(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, через $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ или даже через $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}$, когда число $n$ ясно из контекста. Заметим, что ФАЛ $g_{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}$ *зависит* в точности от переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$, при этом, возможно, от некоторых из них *зависимость фиктивная*. В нашем случае $f_0(x_2, x_3) = x_2x_3 \oplus 1$, $f_1(x_2, x_3) = 1$ и эти две ФАЛ составляют множество $G_2 = \{f_0, f_1\}$. На следующем шаге мы имеем целью разложить функции множества $G_2$ по переменной $x_2$ и таким способом построить множество функций $G_3$. Для дальнейшего не имеет смысла раскладывать ФАЛ по переменной, если зависимость от этой переменной фиктивная (проверьте, что в этом случае полученные подфункции *совпадают* между собой и *равны*[1] исходной ФАЛ). Поэтому выделим из множества $G_2$ его подмножество $\widehat{G}_2 = \{f_0\}$ тех функций, которые существенно зависят от переменной $x_2$, и выпишем разложения Шеннона этих функций (в рассматриваемом примере функция одна):

$$f_0 = \overline{x}_2 \cdot f_{00} \vee x_2 \cdot f_{01}, \qquad \text{где} \quad f_{00} = 1, \quad f_{01} = x_3 \oplus 1 = \overline{x}_3.$$

Далее планируется раскладывать полученные функции по переменной $x_3$, но в этом месте нельзя забыть про функции множества $G_2 \setminus \widehat{G}_2$, которые были временно «отложены» как не зависящие существенно от переменной $x_2$, но в общем случае могут зависеть от переменной $x_3$: $G_3 = \{f_{00}, f_{01}\} \cup (G_2 \setminus \widehat{G}_2) = \{1, \overline{x}_3\}$, $\widehat{G}_3 = \{f_{01}\} = \{\overline{x}_3\}$. Раскладываем функцию $f_{01}$ по переменной $x_3$:

$$f_{01} = \overline{x}_3 \cdot f_{010} \vee x_3 \cdot f_{011}, \qquad \text{где} \quad f_{010} = 1, \quad f_{011} = 0.$$

Таким образом, $G_4 = \{f_{010}, f_{011}\} \cup (G_3 \setminus \widehat{G}_3) = \{0, 1\}$. Будем считать, что $\widehat{G}_4 = G_4$.

[1] В этом месте очень тонкий момент. Равенство ФАЛ определяется с точностью до фиктивных переменных, тем не менее, например, функция-константа как функция двух переменных требует иного количества входных данных, чем та же самая функция, но рассматриваемая с зависимостью лишь от одной переменной — у этих функций не совпадают области определения. Поэтому как за математическими объектами за такими функциями приходится признать *несовпадение*, однако в синтезной проблематике их существо едино: с точки зрения результата — самого закона управления — безразлично, присутствует ли в управляющей конструкции элемент управления фиктивного параметра системы. Поэтому удобно говорить про *равенство* таких функции.

Здесь уместно напомнить, что извлекая закон управления по описанию управляющей системы, по определению считается, что он зависит (не обязательно существенно!) от тех и только тех параметров, которые в этом описании присутствуют. Например, заданная формулой $(x \cdot \overline{x} \vee y)$ функция зависит от двух переменных, а формула $(y \cdot \overline{y} \vee y)$ задаёт функцию одной переменной.

Результатом данного процесса явилось разбиение $(\widehat{G}_2, \widehat{G}_3, \widehat{G}_4)$ множества всех подфункций функций из $G_1$ на непересекающиеся классы. При этом для любого $j$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, любая ФАЛ $h$ из $G_j$ либо является некоторой ФАЛ множества $H_j = \bigcup_{s=j+1}^{4} \widehat{G}_s$ «следующих» классов разбиения, либо для некоторых ФАЛ $h', h'' \in H_j$ представима в виде $h = \overline{x}_j \cdot h' \vee x_j \cdot h''$. Каскадная схема строится итеративно, начиная с «последнего» множества разбиения. Схема, полученная на предыдущей итерации, «надстраивается» элементами, моделирующими указанное представление ФАЛ $h$.

Процесс построения $(2,1)-$ полной каскадной контактной схемы $\Sigma$, реализующей матрицу (в нашем случае — вектор-столбец) проводимости $(f, \overline{f})^{\intercal}$, изображён на рис. 1. Каскадная КС $\Sigma_f$ для ФАЛ $f$ получается из схемы $\Sigma$ удалением входного полюса 0 вместе со всеми инцидентными ему контактами, а инверсная к ней каскадная КС $\Sigma_{\overline{f}}$ для ФАЛ $\overline{f}$ — удалением входного полюса 1.

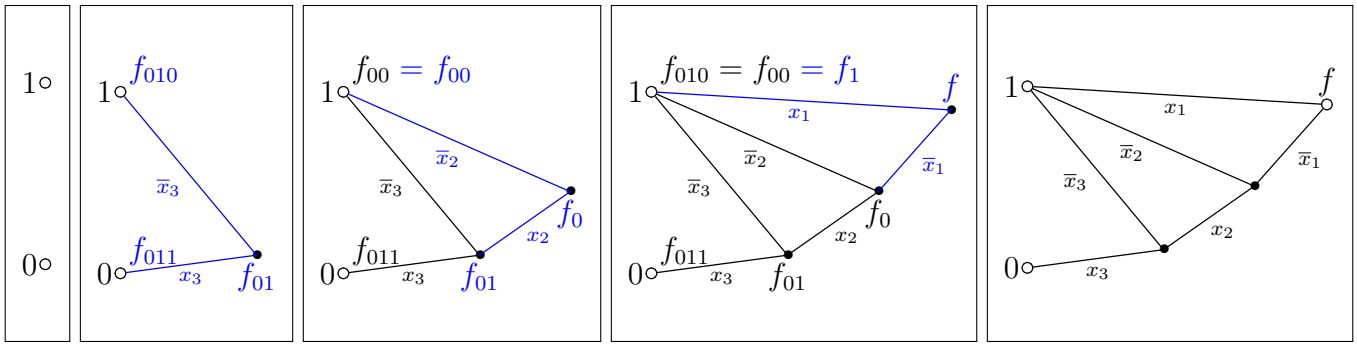



**Рис. 1.** Построение полной каскадной КС

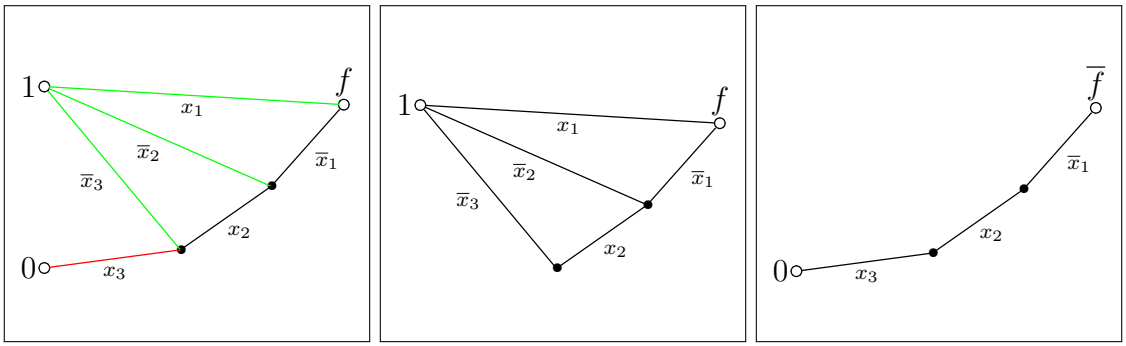



**Рис. 2.** Каскадная КС $\Sigma_f$, реализующая ФАЛ $f$ и инверсная к ней схема $\Sigma_{\overline{f}}$

**Задача №2.13(7)**

Построить методом каскадов контактную схему для функции $f(\tilde{x}^3) = (0000\,0001\,0111\,1111)$.

**Решение:**

По аналогии с разобраным примером, построим разложения функции $f$:

$$G_1: \Big\{ f = \overline{x}_1 \cdot f_0 \vee x_1 \cdot f_1, \qquad f_0 = (0000\,0001), \qquad f_1 = (0111\,1111); \qquad \widehat{G}_1 = G_1,$$

$$G_2: \begin{cases} f_0 = \overline{x}_2 \cdot f_{00} \vee x_1 \cdot f_{01}, & f_{00} = (0000) = 0, & f_{01} = (0001), \\ f_1 = \overline{x}_2 \cdot f_{10} \vee x_1 \cdot f_{11}, & f_{10} = (0111), & f_{11} = (1111) = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_2 = G_2,$$

$$G_3: \begin{cases} f_{01} = \overline{x}_3 \cdot f_{010} \vee x_3 \cdot f_{011}, & f_{010} = (00) = 0, & f_{011} = (01) = x_4, \\ f_{10} = \overline{x}_3 \cdot f_{100} \vee x_3 \cdot f_{101}, & f_{100} = (01) = x_4, & f_{101} = (11) = 1, \\ f_{011} = f_{100} = \overline{x}_4 \cdot 0 \vee x_4 \cdot 1. \end{cases} \qquad \widehat{G}_3 = G_3 \setminus \{f_{00}, f_{11}\}.$$

Процесс построения полной каскадной КС изображён на рис. 4. На рис. 4 изображена каскадная КС для ФАЛ $f$ и инверсная схема, а также показаны цветом те контакты полной каскадной КС, удаление которых приводит к этим схемам.

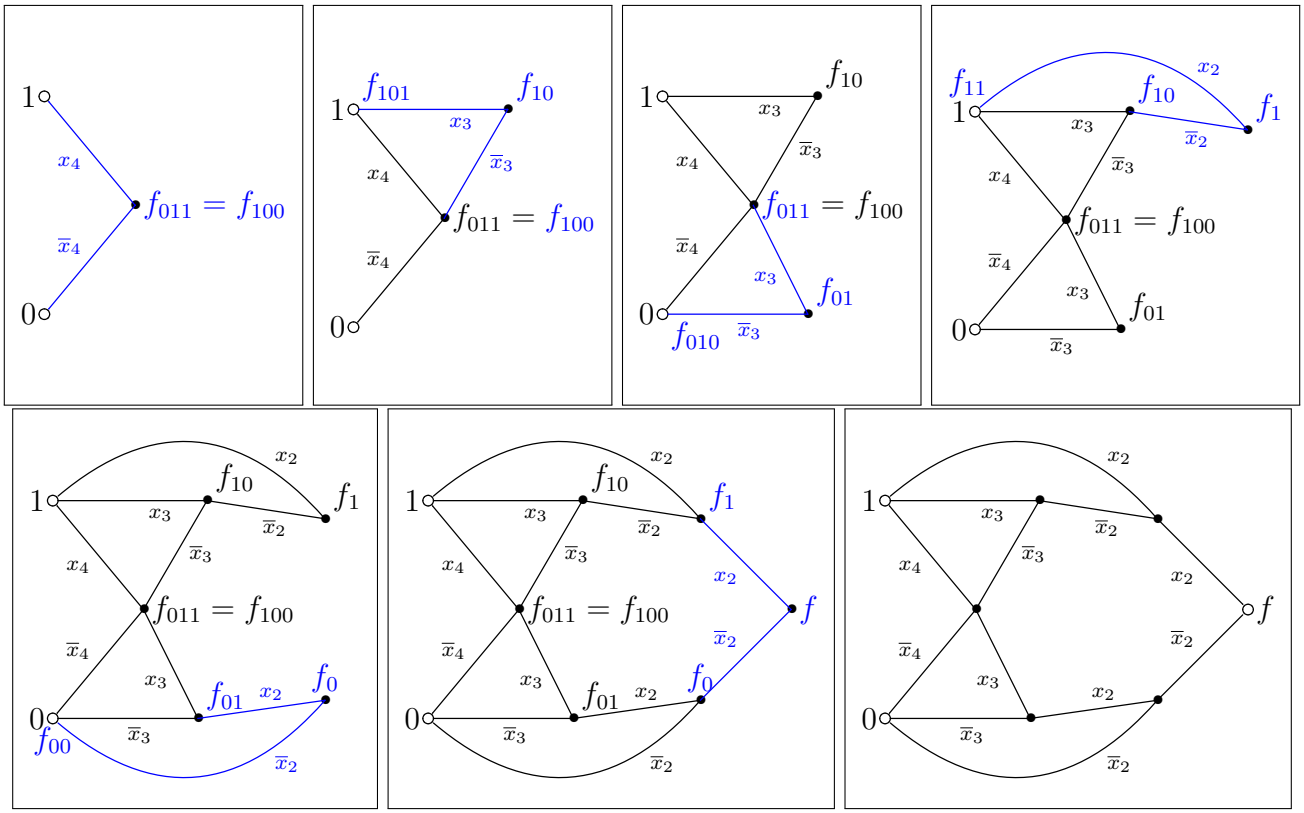



**Рис. 3.** Построение полной каскадной КС

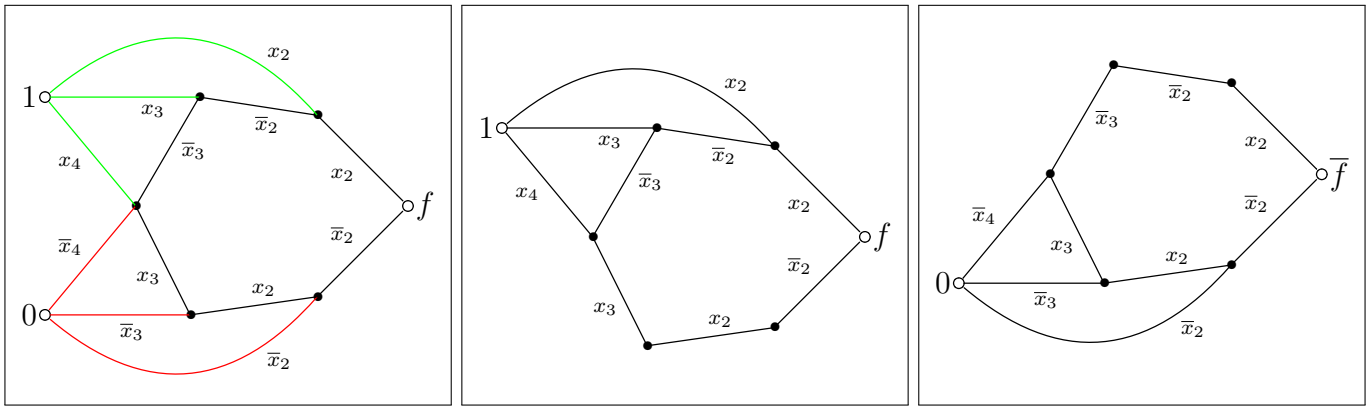



**Рис. 4.** Получение каскадной КС для $f$ и инверсной КС из полной каскадной КС

**Задача №2.14(1)**

Построить методом каскадов контактную схему для системы функций $\Phi = \{f, g\}$, $f = x \cdot y$, $g = x \vee y$.

**Решение:**

Построим разложения функций $f$, $g$:

$$\Phi = G_1 : \begin{cases} f = \overline{x} \cdot f_0 \vee x \cdot f_1, & f_0 = 0, \quad f_1 = y, \\ g = \overline{x} \cdot g_0 \vee x \cdot g_1, & g_0 = y, \quad g_1 = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_1 = G_1,$$

$$G_2 : \begin{cases} f_1 = g_0 = y = \overline{y} \cdot 0 \vee y \cdot 1, \\ f_0 = 0, \quad g_1 = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_2 = \{y\}.$$

Процесс построения полной каскадной КС изображён на рис. 5. На рис. 6 изображена каскадная КС для системы ФАЛ Ф и инверсная схема.

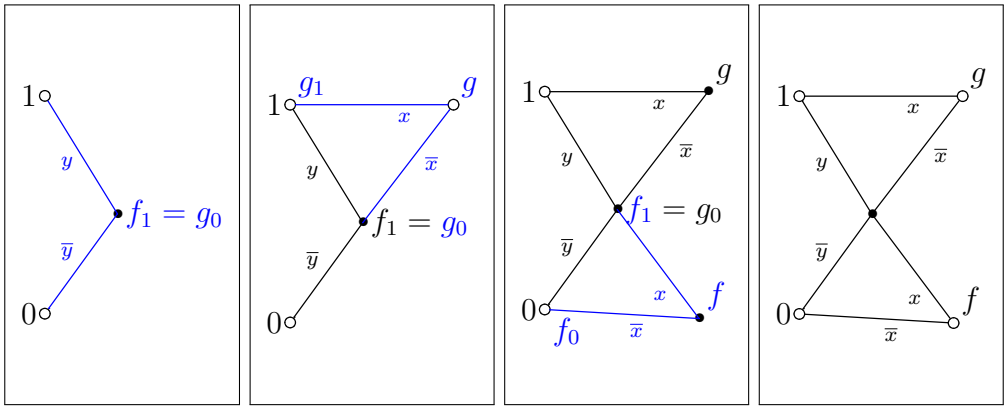



**Рис. 5.** Построение полной каскадной КС

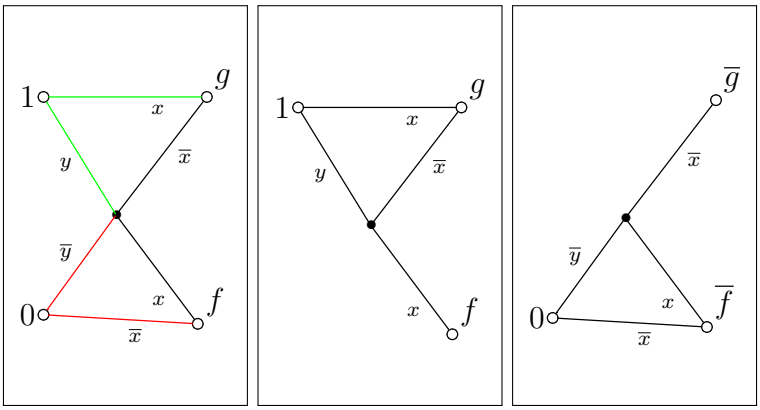



**Рис. 6.** Получение каскадной КС для системы Ф и инверсной к ней КС из полной каскадной КС

**Задача №2.14(5)**

Построить методом каскадов контактную схему для системы функций $\Phi = \{f, g\}$, $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $g = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1x_2$.

**Решение:**

Построим разложения функций $f$, $g$:

$$\Phi = G_1 : \begin{cases} f = \overline{x_1} \cdot f_0 \vee x_1 \cdot f_1, & f_0 = x_2 \oplus x_3, & f_1 = 1 \oplus x_2 \oplus x_3, \\ g = \overline{x_1} \cdot g_0 \vee x_1 \cdot g_1, & g_0 = x_2x_3, & g_1 = x_3 \vee x_2; \end{cases} \qquad \widehat{G}_1 = G_1,$$

$$G_2 : \begin{cases} f_0 = \overline{x_2} \cdot f_{00} \vee x_2 \cdot f_{01}, & f_{00} = x_3, & f_{01} = 1 \oplus x_3 = \overline{x}_3, \\ f_1 = \overline{x_2} \cdot f_{10} \vee x_2 \cdot f_{11}, & f_{10} = \overline{x}_3 = f_{01}, & f_{11} = x_3, \\ g_0 = \overline{x_2} \cdot g_{00} \vee x_2 \cdot g_{01}, & g_{00} = 0, & g_{01} = x_3, \\ g_1 = \overline{x_2} \cdot g_{10} \vee x_2 \cdot g_{11}, & g_{10} = x_3, & g_{11} = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_2 = G_2,$$

$$G_3 : \begin{cases} g_{01} = g_{10} = f_{00} = f_{11} = \overline{x_3} \cdot 0 \vee x_3 \cdot 1, \\ f_{01} = f_{10} = \overline{x_3} \cdot 1 \vee x_3 \cdot 0, \\ g_{00} = 0, \quad g_{11} = 1; \end{cases} \qquad \widehat{G}_3 = \{\overline{x}_3, x_3\}.$$

Процесс построения полной каскадной КС для системы Ф изображён на рис. 7. На рис. 8 изображена каскадная КС для системы Ф и инверсная схема, а также показаны цветом те контакты полной каскадной

КС, удаление которых приводит к этим схемам. Построение схемы из функциональных элементов методом каскадов для системы Ф проиллюстрированно на рисунках 9, 10.

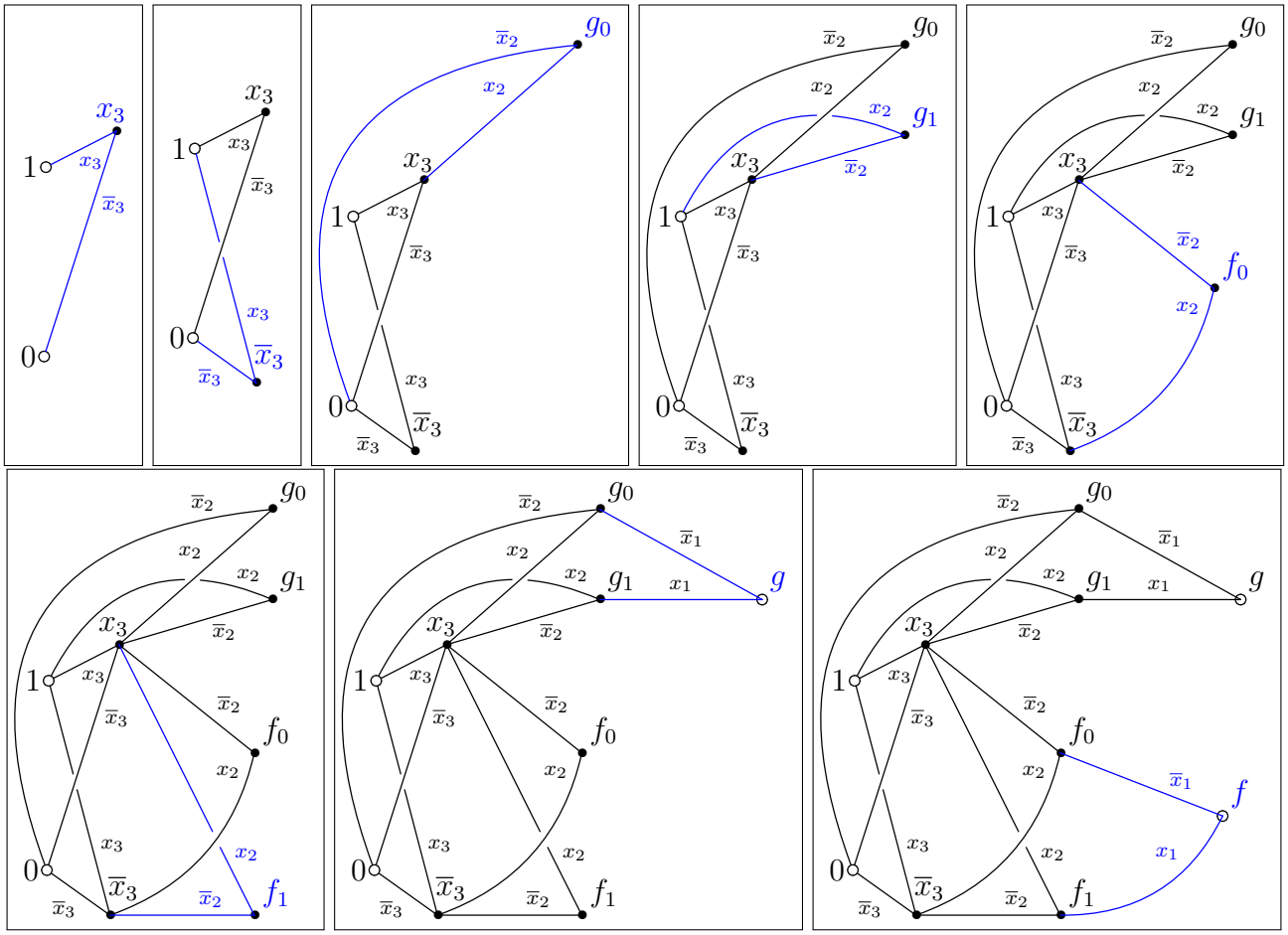


**Рис. 7.** Построение полной каскадной КС

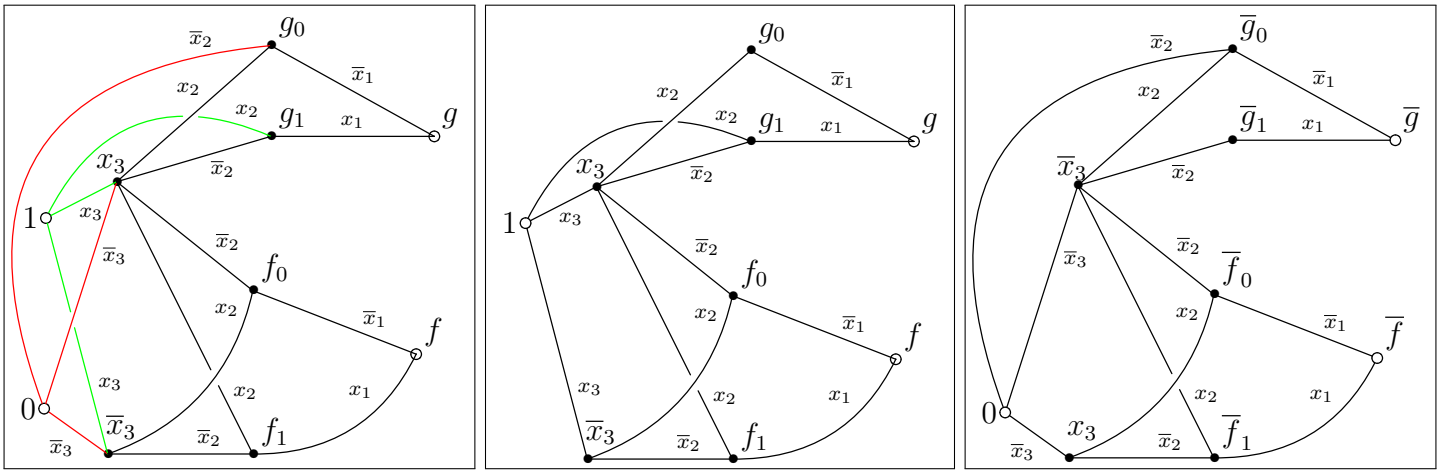


**Рис. 8.** Получение каскадной КС для системы Ф и инверсной к ней КС из полной каскадной КС

## Список литературы

[1] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004.

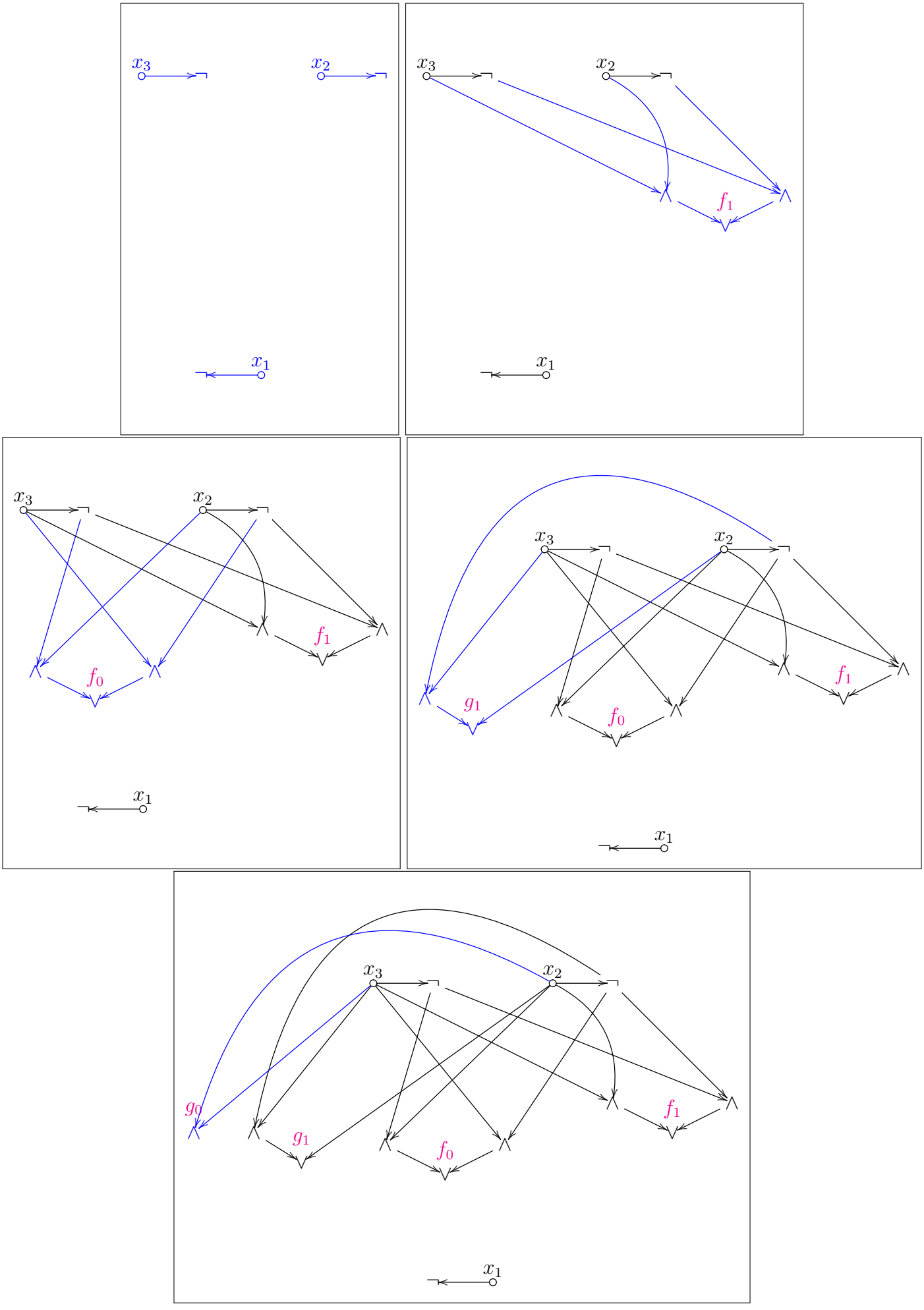



**Рис. 9.** Построение СФЭ методом каскадов

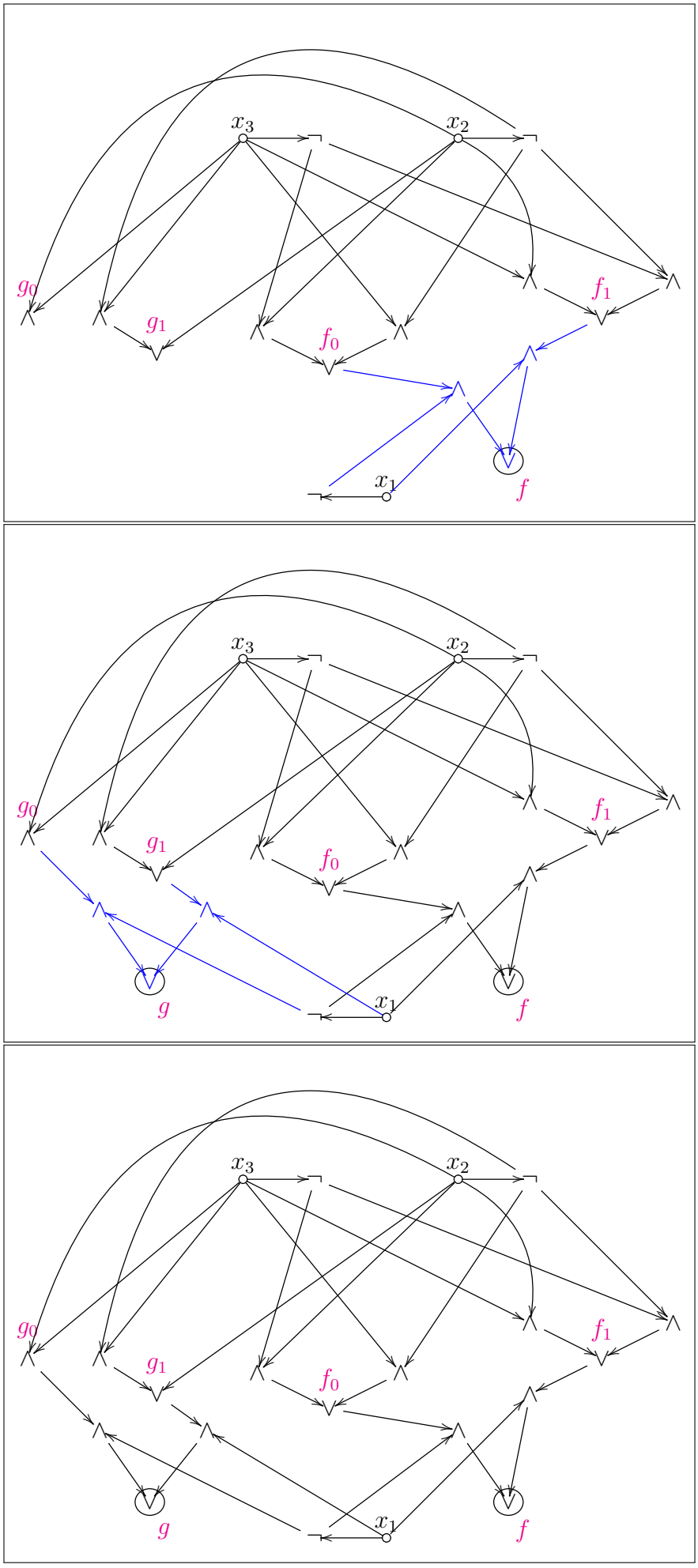



**Рис. 10.** Построение СФЭ методом каскадов (продолжение)

**Решение задач семинара № 7 по курсу "Основы кибернетики"**
**для групп 3-го потока 3-го курса факультета ВМК МГУ.**
**Тема: "Тесты для таблиц, тесты для контактных схем"**

На этом занятии речь пойдет о построении тестов для таблиц и контактных схем (КС). Напомним теоретический материал в соответствии с частью 4 методической разработки по курсу «Основы кибернетики».

Для управляющей системы (схемы) без памяти, функционирование которой описывается дискретной функцией или, в общем случае, вектор-функцией, может быть сформулирована следующая модель, в рамках которой обычно рассматриваются вопросы ее надежности и контроля. Предполагается, что имеется некоторый «внешний» источник неисправностей (источник помех) $U$, под действием которого рассматриваемая схема $\Sigma$ может переходить в одно из своих «неисправных состояний» (схем), определяемых этим источником. Пусть схеме $\Sigma = \Sigma_1$, реализующей функцию $f = f_1$ от входных переменных $X(n) = (x_1, ..., x_n)$, и источнику неисправностей $U$ соответствуют «неисправные» состояния (схемы) $\Sigma_2, ..., \Sigma_s$, где схема $\Sigma_i$, $i = 2, ..., s$, реализует функцию $f_i$ от переменных $X(n)$. При этом все состояния (как исправное $\Sigma = \Sigma_1$, так и неисправные $\Sigma_2, ..., \Sigma_s$) разбиваются на классы (функционально) неотличимых состояний, то есть классы эквивалентности по отношению равенства реализуемых функций, и рассматриваются далее с точностью до неотличимости. В дальнейшем, говоря о ненадежной схеме $\Sigma$, будем иметь в виду пару $(\Sigma, U)$ и (или) соответствующее ей множество схем вместе с теми функциями, которые они реализуют. Для простоты рассмотрения будем считать, что все переменные и функции являются булевскими, хотя многие излагаемые далее результаты без существенных изменений переносятся на случай многозначных функций, случай вектор-функций и другие более общие случаи.

Пусть $(\Sigma, U)$ — указанная выше модель ненадежной схемы $\Sigma$ с возможными состояниями $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma_2, ..., \Sigma_s$, в которых реализуются БФ $f = f_1, f_2, ..., f_s$ соответственно от БП $X(n)$, определенные на множестве наборов $A = \{\alpha_1, ..., \alpha_p\} \subseteq B^n$. Рассмотрим матрицу $M$, $M \in B^{p,s}$, где

$$M\langle i, j\rangle = f_j(\alpha_i),$$

считая, что $i$-й строке ($j$-му столбцу) этой таблицы соответствует набор $\alpha_i$ (соответственно функция $f_j$ и состояние $\Sigma_j$). Матрица, состоящая из различных столбцов (строк) называется отделимой по столбцам (соответственно строкам) матрицей. Заметим, что каждому классу неотличимых состояний модели $(\Sigma, U)$ соответствует группа одинаковых столбцов матрицы $M$, и рассмотрим отделимую по столбцам матрицу $\hat{M}$, состоящую из всех различных столбцов матрицы $M$. При этом будем считать, что каждый столбец матрицы $\hat{M}$ связан с соответствующим классом неотличимости состояний модели $(\Sigma, U)$, и будем называть $\hat{M}$ таблицей контроля (таблицей неисправностей) данной модели. Для простоты будем, как правило, предполагать, что все состояния модели $(\Sigma, U)$ попарно отличимы, то есть, $M = \hat{M}$. Это предположение, очевидно, не ограничивает общности рассуждений.

Пусть, далее, помимо таблицы контроля $M$ для модели $(\Sigma, U)$ задана цель контроля, то есть указано множество $\mathcal{N}$, состоящее из тех неупорядоченных пар различных целых чисел отрезка $[1, s]$, для которых пары состояний (столбцов матрицы $M$) с соответствующими номерами необходимо отличать друг от друга, сравнивая значения, расположенные в тех или иных строках данной пары столбцов. В частности,

если $\mathcal{N}$ состоит из всех пар указанного вида, то целью контроля является диагностика схемы, а если $\mathcal{N} = \{(1,2),...,(1,s)\}$, то — проверка исправности схемы. Множество строк матрицы $M$ с номерами из $T$, $T \subseteq [1,p]$, называется тестом для матрицы $M$ относительно множества $\mathcal{N}$, или, иначе, тестом для $(M,\mathcal{N})$, если для любой пары $(i,j)$ из $\mathcal{N}$ существует $t$, $t \in T$, такое, что $M\langle t,i\rangle \neq M\langle t,j\rangle$. Мощность теста называется также его длиной.

Заметим, что множество, состоящее из всех строк таблицы контроля, всегда образует тест. Тест, который перестает быть тестом при удалении любой своей строки, называется тупиковым, а тест, который имеет минимальную мощность, — минимальным. В том случае, когда целью контроля является диагностика схемы (проверка исправности схемы), тест называется диагностическим (соответственно проверяющим).

Будем говорить, что множество наборов $\tau$, $\tau \subseteq A$, образует тест для модели $(\Sigma,U)$ относительно цели контроля $\mathcal{N}$, или, иначе, тест для $(\Sigma,U,\mathcal{N})$, если соответствующие наборам из $\tau$ строки матрицы $M$ образуют тест для $(M,\mathcal{N})$. Все введенные выше понятия, которые касаются тестов для таблиц, без изменений переносятся на случай тестов для ненадежных схем. Отметим, что, если источник неисправностей $U$ допускает поломку не более одиного элемента (контакта) схемы $S$, то тест для модели $(\Sigma,U)$ называется единичным; если же источник неисправностей $U$ допускает поломку любого числа элементов (контактов) схемы $S$, то тест для модели $(\Sigma,U)$ называется полным.

Для описания тестов можно ввести функцию, аналогичную функции покрытия. Пусть $M$, $M \in B^{p,s}$, — отделимая по столбцам матрица, а $\mathcal{N}$ — связанная с ней цель контроля. Сопоставим $i$-й строке, $i \in [1,p]$, матрицы $M$ булеву переменную $y_i$, а каждому набору $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_p)$, $\beta \in B^p$, значений этих переменных $y = (y_1,...,y_p)$ — множество строк матрицы $M$ с номерами из множества $I = I(\beta) \subseteq [1,p]$, где $i \in I(\beta)$ тогда и только тогда, когда $\beta_i = 1$. Рассмотрим БФ $F(y)$, для которой $F(\beta) = 1$ тогда и только тогда, когда система строк матрицы $M$ с номерами из $I(\beta)$ образует тест для $(M,\mathcal{N})$, и будем называть эту БФ функцией теста для $(M,\mathcal{N})$. Сопоставим паре $(M,\mathcal{N})$ матрицу $\mathcal{M}$ из множества $B^{p,S}$, $S = |\mathcal{N}|$, столбцы которой пронумерованы па́рами из $\mathcal{N}$, а ее столбец с номером $(i,j) \in \mathcal{N}$ получается в результате поразрядного сложения по модулю 2 столбцов с номерами $i$ и $j$ матрицы $M$. Заметим, что строки матрицы $M$ с номерами из множества $T$, $T \subseteq [1,p]$, образуют тест (тупиковый тест, минимальный тест) для пары $(M,\mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда строки матрицы $M$ с номерами из $T$ образуют покрытие (тупиковое покрытие, покрытие минимальной длины) матрицы $\mathcal{M}$. Отсюда вытекает, в частности, что БФ теста $F$ для пары $(M,\mathcal{N})$ является одновременно БФ покрытия для матрицы $\mathcal{M}$ и обратно, а значит для нее, в силу леммы 6.1 главы 1, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.1.** *Функция теста $F(y_1,\ldots,y_p)$ для отделимой по столбцам матрицы $M$, $M \in B^{p,s}$, и цели контроля $\mathcal{N}$ может быть задана с помощью КНФ*

$$F(y_1,\ldots,y_p) = \bigwedge_{(i,j)\in\mathcal{N}} \Bigg( \bigvee_{\substack{1\leqslant t\leqslant p \\ M<t,i>\neq M<t,j>}} y_t \Bigg). \tag{1}$$

**Следствие.** *Каждая элементарная конъюнкция вида $y_{t_1}\cdots y_{t_r}$ сокращенной ДНФ функции $F(y_1,\ldots,y_p)$, получающаяся из КНФ (1) в результате раскрытия скобок и приведения подобных, соответствует тупиковому тесту, связанному с множеством $T = \{t_1,\ldots,t_r\}$, и обратно.*

На данной лемме основан следующий алгоритм построения всех тупиковых тестов для матрицы $M$ относительно цели контроля $\mathcal{N}$:

1) выписываем для функции теста КНФ вида (1);

2) раскрывая в ней скобки и приводя подобные, получаем сокращенную ДНФ функции теста;

3) сопоставляем каждой элементарной конъюнкции этой сокращенной ДНФ тупиковый тест.

**Лемма 1.2.** *Длина любого тупикового диагностического теста для отделимой по столбцам матрицы из множества* $B^{p,s}$ *заключена в пределах от* $\lceil \log s \rceil$ *до* $(s-1)$.

**5.1(1)** Построить все тупиковые диагностические тесты для таблицы (матрицы)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Решение**. Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи диагностики матрицы $M$ имеет вид $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{Д}} = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le 4\}$. Сопоставим каждой строке матрицы $M$ свою переменную

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

и построим матрицу $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$ для пары $(M, \mathcal{N})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Построим КНФ функции диагностического теста матрицы $M$ (или, что то же самое, КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}$) в соответствии с леммой 1.1:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 \vee y_3)(y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4)(y_2 \vee y_4)(y_2 \vee y_4)(y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4)(y_1 \vee y_3).$$

Выполним упрощение этой КНФ (избавляясь от повторов эквивалентных множителей и осуществляя конъюнктивные поглощения на основании тождества $K'(K' \vee K'') = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 \vee y_3)(y_2 \vee y_4).$$

Построим сокращенную ДНФ функции $F$ по методу Нельсона, раскрыв скобки и приведя подобные (с учетом выполнения дизъюнктивных поглощений на основании тождества $K' \vee K'K'' = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_2 \vee y_1y_4 \vee y_2y_3 \vee y_3y_4.$$

Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции $F$ задает свой тупиковый диагностический тест для таблицы $M$, при этом все такие тесты учтены (ни один не пропущен).

**Ответ.** Все тупиковые диагностические тесты для таблицы $M$ соответствуют следующим множествам номеров строк матрицы $M$: $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$.

**5.1(2)** Построить все тупиковые диагностические тесты для таблицы (матрицы)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение**. Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи диагностики матрицы $M$ имеет вид $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{Д}} = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le 6\}$. Сопоставим каждой строке матрицы $M$ свою переменную

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

и построим матрицу $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$ для пары $(M, \mathcal{N})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Построим КНФ функции диагностического теста матрицы $M$ (или, что то же самое, КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}$) в соответствии с леммой 1.1, сразу избавляясь от повторов эквивалентных множителей:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2 \vee y_3)(y_2 \vee y_4)y_1(y_1 \vee y_2 \vee y_3)(y_1 \vee y_2 \vee y_4)(y_3 \vee y_4)(y_1 \vee y_3 \vee y_4).$$

Выполним упрощение этой КНФ (осуществляя конъюнктивные поглощения на основании тождества $K'(K' \vee K'') = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1(y_2 \vee y_3)(y_2 \vee y_4)(y_3 \vee y_4).$$

Построим сокращенную ДНФ функции $F$ по методу Нельсона, раскрыв скобки и приведя подобные (с учетом выполнения дизъюнктивных поглощений на основании тождества $K' \vee K'K'' = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_2y_3 \vee y_1y_2y_4 \vee y_1y_3y_4.$$

Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции $F$ задает свой тупиковый диагностический тест для таблицы $M$, при этом все такие тесты учтены (ни один не пропущен).

**Ответ.** Все тупиковые диагностические тесты для таблицы $M$ соответствуют следующим множествам номеров строк матрицы $M$: $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$.

**5.1(3)** Построить все тупиковые проверяющие тесты для таблицы (матрицы)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение**. Для начала избавимся от повторов одинаковых столбцов в матрице $M$, построив отделимую по столбцам матрицу $\hat{M}$, состоящую из всех различных столбцов матрицы $M$, сопоставим каждой строке матрицы $\hat{M}$ свою переменную

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_4' \end{matrix}$$

(предварительно все строки были разбиты на классы эквивалентности так, что в один класс входили попарно равные или попарно противоположне строки, названия переменных для строк из одного класса отличаются лишь числом штрихов). Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи проверки матрицы $\hat{M}$ имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\Pi} = \{(1, j) \mid 2 \le j \le 12\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(\hat{M}, \mathcal{N}^{\Pi})$ для пары $(\hat{M}, \mathcal{N})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке:

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}'$:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_2 \vee y_3)(y_1 \vee y_2 \vee y_3)(y_1 \vee y_2)y_1(y_1 \vee y_4)(y_1 \vee y_2 \vee y_4)\&$$

$$\&(y_1 \vee y_2 \vee y_3 \vee y_4)(y_3 \vee y_4)(y_2 \vee y_3 \vee y_4)(y_2 \vee y_4)y_4(y_3 \vee y_4).$$

Выполним упрощение этой КНФ (осуществляя конъюнктивные поглощения на основании тождества $K'(K' \vee K'') = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_4(y_2 \vee y_3).$$

Построим сокращенную ДНФ функции $F$ по методу Нельсона, раскрыв скобки и приведя подобные (с учетом выполнения дизъюнктивных поглощений на основании тождества $K' \vee K'K'' = K'$):

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1y_2y_4 \vee y_1y_3y_4.$$

Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции $F$ задает свой тупиковый проверяющий тест для таблицы $M$. Чтобы охватить все тупиковые проверяющие тесты для таблицы $M$, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены строк на строки из того же класса эквивалентности.

**Ответ.** Все тупиковые проверяющие тесты для таблицы $M$ соответствуют следующим множествам номеров строк матрицы $M$: $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$.

**6.2.** Построить все тупиковые а) проверяющие, б) диагностические тесты для контактной схемы на рис. 1. и источника неисправностей, допускающего размыкание контактов вида $\bar{z}$, $z$, а также замыкание контакта вида $y$, причем общее число неисправных контактов не может быть больше 1.

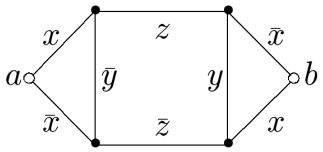



Рис. 1.

**Решение**. Вычислим таблицу контроля для заданных схемы и источника неисправностей (здесь $f_1 = f$ — функция, реализуемая исходной схемой в отсутствие неисправностей, $f_2 = f_{\bar{z}}^{\text{р}}$ — функция, реализуемая схемой при размыкании контакта $\bar{z}$, $f_3 = f_z^{\text{р}}$ — функция, реализуемая схемой при размыкании контакта $z$, $f_4 = f_y^{\text{з}}$ — функция, реализуемая схемой при замыкании контакта $y$):

| $x$ | $y$ | $z$ | $f_1 = f$ | $f_2 = f_{\bar{z}}^{\text{р}}$ | $f_3 = f_z^{\text{р}}$ | $f_4 = f_y^{\text{з}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $y_1$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $y_2$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $y_3$ |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | $y_4$ |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $y'_3$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $y'_1$ |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $y'_4$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $y'_2$ |

Функциональную часть этой таблицы будем считать матрицей $M$. Каждой строке матрицы $M$ сопоставлена своя переменная; предварительно все строки $M$ (и соответствующие им входные наборы) были разбиты на классы эквивалентности так, что в один класс входили попарно равные или попарно противоположне строки, названия переменных для строк из одного класса отличаются лишь числом штрихов.

а) Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи проверки матрицы $M$ имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{П}} = \{(1, j) \mid 2 \le j \le 4\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(M, \mathcal{N}^{\text{П}})$ для пары $(M, \mathcal{N}^{\text{П}})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}^{\text{П}}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы $M$, не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в $\mathcal{M}'$):

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}'$:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_2 y_3.$$

Ясно. что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции $F$. Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции $F$ задает свой тупиковый проверяющий тест для таблицы $M$. Чтобы охватить все

тупиковые проверяющие тесты для таблицы $M$, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые проверяющие тесты: $\{(000),(001),(010)\}$, $\{(000),(001),(100)\}$, $\{(000),(111),(010)\}$, $\{(000),(111),(100)\}$, $\{(101),(001),(010)\}$, $\{(101),(001),(100)\}$, $\{(101),(111),(010)\}$, $\{(101),(111),(100)\}$.

б) Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи диагностики матрицы $M$ имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{Д}} = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le 4\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}''(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$ для пары $(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}^{\text{Д}}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы $M$, не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в $\mathcal{M}''$):

$$\mathcal{M}'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}''$:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_3 y_2 y_1 (y_2 \vee y_3)(y_1 \vee y_3)(y_1 \vee y_2) = y_1 y_2 y_3.$$

Ясно. что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции $F$. Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции $F$ задает свой тупиковый диагностический тест для таблицы $M$. Чтобы охватить все тупиковые диагностические тесты для таблицы $M$, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые диагностические тесты: $\{(000),(001),(010)\}$, $\{(000),(001),(100)\}$, $\{(000),(111),(010)\}$, $\{(000),(111),(100)\}$, $\{(101),(001),(010)\}$, $\{(101),(001),(100)\}$, $\{(101),(111),(010)\}$, $\{(101),(111),(100)\}$.

**Ответ.** Все тупиковые (как проверяющие, так и диагностические) тесты: $\{(000),(001),(010)\}$, $\{(000),(001),(100)\}$, $\{(000),(111),(010)\}$, $\{(000),(111),(100)\}$, $\{(101),(001),(010)\}$, $\{(101),(001),(100)\}$, $\{(101),(111),(010)\}$, $\{(101),(111),(100)\}$.

**6.4.** Построить все тупиковые а) проверяющие, б) диагностические тесты для контактной схемы на рис. 2 и источника неисправностей, допускающего одну из следующих неисправностей: обрыв контакта $\bar{z}$, обрыв выделенного контакта $z$ и замыкание выделенного контакта $y$.

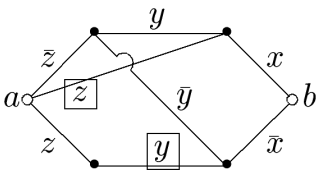



Рис. 2.

**Решение**. Вычислим таблицу контроля для заданных схемы и источника неисправностей (здесь $f_1 = f$ — функция, реализуемая исходной схемой в отсутствие неисправностей, $f_2 = f^{\text{р}}_{\bar{z}}$ — функция, реализуемая схемой при размыкании контакта $\bar{z}$, $f_3 = f^{\text{р}}_{z}$ — функция, реализуемая схемой при размыкании выделенного контакта $z$, $f_4 = f^{\text{з}}_{y}$ — функция, реализуемая схемой при замыкании выделенного контакта $y$):

| $x$ | $y$ | $z$ | $f_1 = f$ | $f_2 = f^{\text{р}}_{\bar{z}}$ | $f_3 = f^{\text{р}}_{z}$ | $f_4 = f^{\text{з}}_{y}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $y_1$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $y_2$ |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $y_3$ |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $y'_3$ |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $y''_3$ |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $y_4$ |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | $y'_1$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | $y'_4$ |

Функциональную часть этой таблицы будем считать матрицей $M$. Каждой строке матрицы $M$ сопоставлена своя переменная; предварительно все строки $M$ (и соответствующие им входные наборы) были разбиты на классы эквивалентности так, что в один класс входили попарно равные или попарно противоположне строки, названия переменных для строк из одного класса отличаются лишь числом штрихов.

а) Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи проверки матрицы $M$ имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{П}} = \{(1, j) \mid 2 \le j \le 4\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(M, \mathcal{N}^{\text{П}})$ для пары $(M, \mathcal{N}^{\text{П}})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}^{\text{П}}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы $M$, не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в $\mathcal{M}'$):

$$\mathcal{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}'$:

$$F(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 y_2 y_4.$$

Ясно. что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции $F$. Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции $F$ задает свой тупиковый проверяющий тест для таблицы $M$. Чтобы охватить все тупиковые проверяющие тесты для таблицы $M$, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые проверяющие тесты: $\{(000),(001),(101)\}$, $\{(000),(001),(111)\}$, $\{(110),(001),(101)\}$, $\{(110),(001),(111)\}$.

б) Цель контроля $\mathcal{N}$ для задачи диагностики матрицы $M$ имеет вид

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^{\text{Д}} = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le 4\}.$$

Построим матрицу $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}''(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$ для пары $(M, \mathcal{N}^{\text{Д}})$, состоящую из покоординатных сумм (по модулю 2) пар столбцов, входящих в $\mathcal{N}^{\text{Д}}$, при этом из каждого класса эквивалентности строк беря по одной строке (заметим: строки матрицы $M$, не содержащие неодинаковых элементов, можно было бы не включать в $\mathcal{M}''$):

$$\mathcal{M}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix}$$

Построим КНФ функции покрытия матрицы $\mathcal{M}''$:

$$F(y_1,y_2,y_3,y_4) = y_1y_4y_2(y_1 \vee y_4)(y_1 \vee y_2)(y_2 \vee y_4) = y_1y_2y_4.$$

Ясно. что в правой части этого равенства находится сокращенная ДНФ функции $F$. Каждое слагаемое построенной сокращенной ДНФ функции $F$ задает свой тупиковый диагностический тест для таблицы $M$. Чтобы охватить все тупиковые диагностические тесты для таблицы $M$, следует в каждом построенном тесте осуществить всевозможные замены входных наборов на входные наборы из того же класса эквивалентности. Все тупиковые диагностические тесты: $\{(000),(001),(101)\}$, $\{(000),(001),(111)\}$, $\{(110),(001),(101)\}$, $\{(110),(001),(111)\}$.

**Ответ.** Все тупиковые (как проверяющие, так и диагностические) тесты: $\{(000),(001),(101)\}$, $\{(000),(001),(111)\}$, $\{(110),(001),(101)\}$, $\{(110),(001),(111)\}$.

**6.11.** Найти длину минимального единичного проверяющего теста относительно размыканий контактов в контактной схеме на рис. 3.

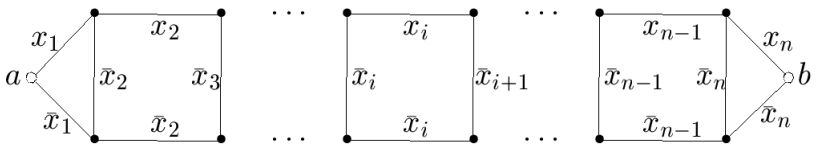



Рис. 3.

**Решение**. Заметим: через контакты $\bar{x}_1$, $x_n$ и «вертикальные» контакты $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, ..., $\bar{x}_n$ проходит по одной простой проводящей цепи, соединяющей полюсы схемы, и при этом эти цепи проводят на попарно различных наборах. Значит, чтобы обнаружить одиночные размыкания указанных контактов, в единичный проверяющий тест необходимо включить упомянутые $n+1$ наборов. Остается заметить, что на этих же наборах обнаруживаются одиночные размыкания всех контактов схемы.

**Ответ.** $n+1$.

## Литература

1. Алексеев В. Б., Вороненко А. А., Ложкин С. А., Романов Д. С., Сапоженко А. А., Селезнева С. Н. Задачи по курсу «Основы кибернетики». М.: МАКС Пресс, 2011.

## Семинар 8

## Асимптотически наилучшие методы синтеза схем для функций из специальных классов

Напомним, что для булевой функции $f$, $f \in P_2(n)$, её сложностью в некотором классе управляющих систем называется минимальная сложность её реализации в нём. Таким образом, сложность $L^K(f)$ в классе контактных схем (КС) определяется как

$$L^K(f) = \min_{\Sigma \text{ – КС для } f} L(\Sigma),$$

а в классе схем из функциональных элементов (СФЭ)[1]:

$$L^C(f) = \min_{\Sigma \text{ – СФЭ для } f} L(\Sigma).$$

Далее будем рассматривать функции из различных специальных классов. Пусть $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} \subseteq P_2$, — некоторый класс булевых функций. Пусть, далее, $\mathcal{Q}(n) = \mathcal{Q} \cap P_2(n)$. Функцией Шеннона сложности схем для класса $\mathcal{Q}(n)$ называется сложность самой сложной функции в нем:

$$L^K(\mathcal{Q}(n)) = \max_{f \in \mathcal{Q}(n)} L^K(f);$$

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) = \max_{f \in \mathcal{Q}(n)} L^C(f).$$

Напомним, что при $\mathcal{Q}(n) = P_2(n)$ соответствующие функции Шеннона обозначаются $L^K(n)$ и $L^C(n)$; и при $n \to \infty$

$$L^K(n) \sim \frac{2^n}{n}; \quad L^C(n) \sim \frac{2^n}{n}.$$

**Утверждение 1.** 1. *Для класса функций $\mathcal{Q}(n)$ такого, что*

$$\log n = o\left(\log\log|\mathcal{Q}(n)|\right), \tag{1}$$

*выполняется асимптотическое неравенство*

$$L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}.$$

2. *Для класса функций $\mathcal{Q}(n)$ такого, что*

$$n = o\left(\frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}\right), \tag{2}$$

*выполняется асимптотическое неравенство*

$$L^C(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|}.$$

Утверждение 1 будет использоваться для доказательства нижних оценок функции Шеннона. Для установления верхней оценки, как правило, необходимо свести задачу синтеза СФЭ или КС для любой функции из $\mathcal{Q}(n)$ к задаче синтеза соответствующей схемы для нескольких произвольных функций от меньшего числа переменных, и воспользоваться следующим утверждением:

**Утверждение 2.** *Для любой функции $f$, $f \in P_2(n)$ существуют реализующие её КС $\Sigma_1$ и СФЭ $\Sigma_2$ такие, что*

$$L(\Sigma_1) \lesssim \frac{2^n}{n}; \quad L(\Sigma_2) \lesssim \frac{2^n}{n}.$$

**Задача 1.** Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, равных 1 при $x_1 = 1$, в КС.

---

[1] СФЭ рассматриваются в стандартном базисе $\{\&, \vee, \neg\}$.

**Решение.** В нашем случае требуется установить поведение $L^K(\mathcal{Q}(n))$ для

$$\mathcal{Q}(n) = \{f(x_1, \ldots, x_n) \,:\, f(1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}.$$

1. **Нижняя оценка.** Найдем $|\mathcal{Q}(n)|$. Очевидно, что каждая функция однозначно определяется значениями на всех наборах вида $(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$. Таких наборов в точности $2^{n-1}$. Следовательно, $|\mathcal{Q}(n)| = 2^{2^{n-1}}$. Условие (1) выглядит так:

$$\log n = o\left(\log\log|\mathcal{Q}(n)|\right) = o(n-1)$$

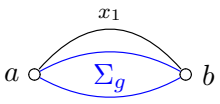
и остается справедливым, поэтому можно применить утверждение 1:

$$L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{\log|\mathcal{Q}(n)|}{\log\log|\mathcal{Q}(n)|} = \frac{2^{n-1}}{n-1} \sim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

2. **Верхняя оценка.** Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f \in \mathcal{Q}(n)$. Разложим функцию $f$ по переменной $x_1$ :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 = x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Функция $g(x_2, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots x_n)$ зависит от $n-1$ переменных, а значит, по утверждению 2, может быть реализована КС $\Sigma_g$ со сложностью $L(\Sigma_g) \lesssim \frac{2^{n-1}}{n-1} \sim \frac{2^{n-1}}{n}$. Схему $\Sigma_f$ для функции $f$ можно построить согласно разложению $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee g(, x_2, \ldots x_n)$ :




При этом $L(\Sigma_f) = L(\Sigma_g) + 1 \lesssim \frac{2^{n-1}}{n}$.

Сопоставляя верхнюю и нижнюю оценки, получаем $L^K(\mathcal{Q}(n)) \sim \frac{2^{n-1}}{n}$.

**Задача 2.** Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса $S(n)$ всех самодвойственных функций в СФЭ.

**Решение.** Напомним, что функция $f$ самодвойственная, если $f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}$.

1. **Нижняя оценка.** Поскольку каждая функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in S(n)$ взаимно однозначно определяется половиной своего столбца значений (который имеет вид $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2^{n-1}}\bar{\alpha}_{2^{n-1}} \ldots \bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_1)$, то $|S(n)| = 2^{2^{n-1}}$. Это означает выполнениие условия (2), и, следовательно,

$$L^C(S(n)) \gtrsim \frac{\log|S(n)|}{\log\log|S(n)|} \sim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

2. **Верхняя оценка.** Для доказательства верхней оценки рассмотрим произвольную функцию $f(x_1, \ldots, x_n) \in S(n)$. Её столбец значений имеет вид

$$(\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_{2^{n-1}} \quad \bar{\alpha}_{2^{n-1}} \ldots \bar{\alpha}_2\, \bar{\alpha}_1).$$

Рассмотрим функцию $g(x_2, \ldots, x_n)$, столбец значений которой имеет вид $(\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2^{n-1}})$. Справедливо следующее представление:

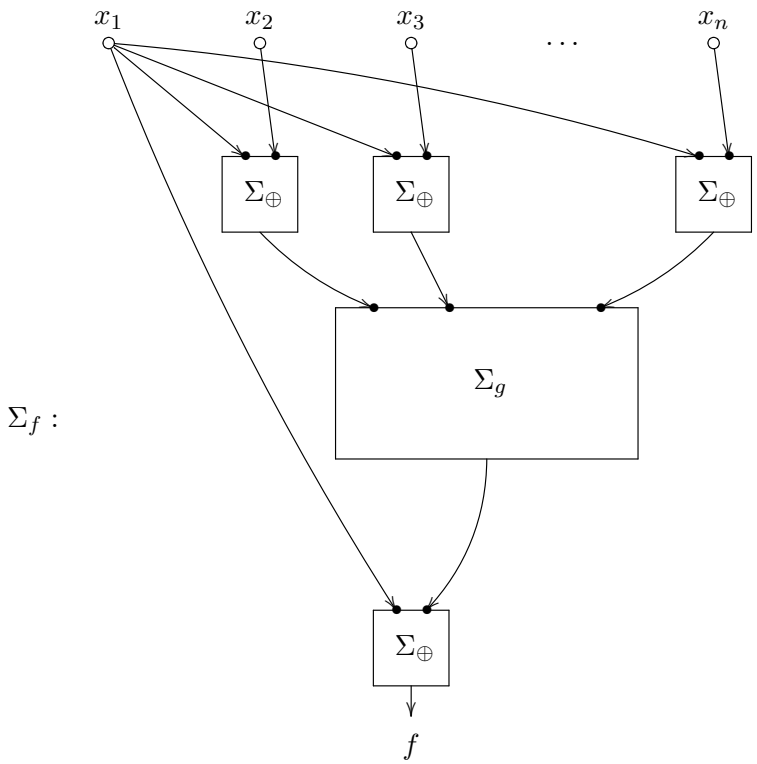
$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \oplus g(x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_3, \ldots, x_1 \oplus x_n).$$

Действительно, при $x_1 = 0$ имеем $f(0, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n)$ и совпадение столбцов значений, а при $x_1 = 1$ : $f(1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \oplus g(x_2 \oplus 1, \ldots, x_n \oplus 1) = \overline{g(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)} = \overline{f(0, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$.

Поскольку $g \in P_2(n-1)$, то существует реализующая её СФЭ $\Sigma_g$, сложность которой

$$L(\Sigma_g) \lesssim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Можно построить схему $\Sigma_f$ следующим образом:




Здесь $\Sigma_\oplus$ — схема, реализующая сложение $a \oplus b$. Такая схема, очевидно, может быть реализована с константной сложностью.

$$L(\Sigma_f) \leqslant n \cdot L(\Sigma_\oplus) + L(\Sigma_g) \leqslant L(\Sigma_g) + O(n) \lesssim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Имеем в результате $L^C(S(n)) \sim \dfrac{2^{n-1}}{n}$.

**Задача 3.** Установить асимптотику функции Шеннона для сложности класса $\mathcal{Q}(n)$ всех функций, симметричных по первым трем БП, в КС.

**Решение.** Указанный класс функций можно определить следующим образом. Если $f \in \mathcal{Q}(n)$, то для любых $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in B$, и любой перестановки $\pi$ индексов $(1, 2, 3)$ справедливо:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, x_4, \dots, x_n) = f(\sigma_{\pi(1)}, \sigma_{\pi(2)}, \sigma_{\pi(3)}, x_4, \dots, x_n).$$

Любая функция с таким свойством принадлежит классу $\mathcal{Q}(n)$.

1. **Нижняя оценка.** Любая функция $f \in \mathcal{Q}(n)$ определяется однозначно четырьмя функциями:

   $g_0(x_4, \dots, x_n) = f(0, 0, 0, x_4, \dots, x_n)$,
   $g_1(x_4, \dots, x_n) = f(0, 0, 1, x_4, \dots, x_n) = f(0, 1, 0, x_4, \dots, x_n) = f(1, 0, 0, x_4, \dots, x_n)$,
   $g_2(x_4, \dots, x_n) = f(0, 1, 1, x_4, \dots, x_n) = f(1, 0, 1, x_4, \dots, x_n) = f(1, 1, 0, x_4, \dots, x_n)$,
   $g_3(x_4, \dots, x_n) = f(1, 1, 1, x_4, \dots, x_n)$,

   каждая из которых зависит от $(n-3)$ БП. Поэтому

   $$|\mathcal{Q}(n)| = |P_2(n-3)|^4 = \left(2^{2^{n-3}}\right)^4 = 2^{2^{n-1}},$$

   и, аналогично предыдущим задачам, условие (1) выполняется и

   $$L^K(\mathcal{Q}(n)) \gtrsim \frac{2^{n-1}}{n}.$$

2. **Верхняя оценка.** Разложим произвольную функцию $f \in \mathcal{Q}(n)$ по переменным $x_1, x_2, x_3$:

   $$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) = {} & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 f(0, 0, 0, x_4, \dots, x_n) \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 f(0, 0, 1, x_4, \dots, x_n) \vee \\ & \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 f(0, 1, 0, x_4, \dots, x_n) \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 f(0, 1, 1, x_4, \dots, x_n) \vee \\ & \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 f(1, 0, 0, x_4, \dots, x_n) \vee x_1\bar{x}_2 x_3 f(1, 0, 1, x_4, \dots, x_n) \vee \\ & \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 f(1, 1, 0, x_4, \dots, x_n) \vee x_1 x_2 x_3 f(1, 1, 1, x_4, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Преобразуем это разложение, используя обозначенные выше функции $g_0, g_1, g_2, g_3$ :

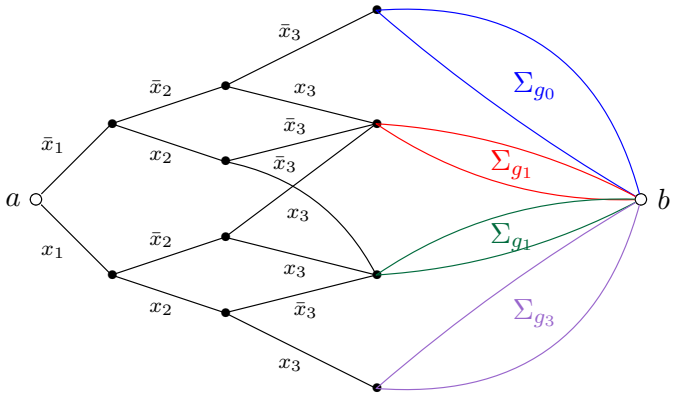
$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_n) = {} & \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \cdot g_0(x_4,\ldots,x_n) \vee \\ & \vee (\bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \cdot g_1(x_4,\ldots,x_n) \vee \\ & \vee (\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3) \cdot g_2(x_4,\ldots,x_n) \vee \\ & \vee x_1x_2x_3 \cdot g_3(x_4,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Согласно утверждению 2, для функций $g_0, g_1, g_2, g_3 \in P_2(n-3)$ существуют реализующие их КС $\Sigma_{g_1}, \Sigma_{g_2}, \Sigma_{g_3}, \Sigma_{g_4}$ соответственно, сложность которых

$$L(\Sigma_{g_i}) \lesssim \frac{2^{n-3}}{n}, \quad i = 1,2,3,4.$$

КС $\Sigma_f$ для $f$ может быть построена исходя из разложения выше:

$\Sigma_f$ :




При этом:

$$L(\Sigma_f) = 14 + L(\Sigma_{g_1}) + L(\Sigma_{g_2}) + L(\Sigma_{g_3}) + L(\Sigma_{g_4}) \lesssim 4 \cdot \frac{2^{n-3}}{n} = \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Имеем в результате $L^K(\mathcal{Q}(n)) \sim \dfrac{2^{n-1}}{n}$.

## Синтез самокорректирующихся КС

Будем рассматривать два вида неисправностей в классе КС, которые могут произойти с одним контактом:

(1) Обрыв контакта. Соответствующее ребро удаляется из схемы.
(2) Замыкание контакта. Контакт проводит при любом значении переменной. Можно представлять это как замену контакта проводником (ребром без пометки)

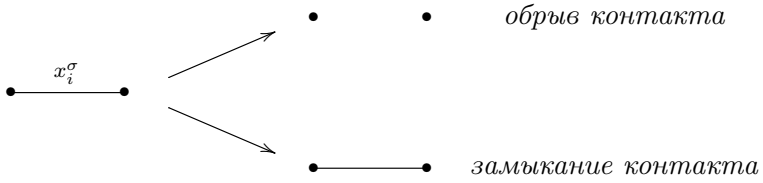
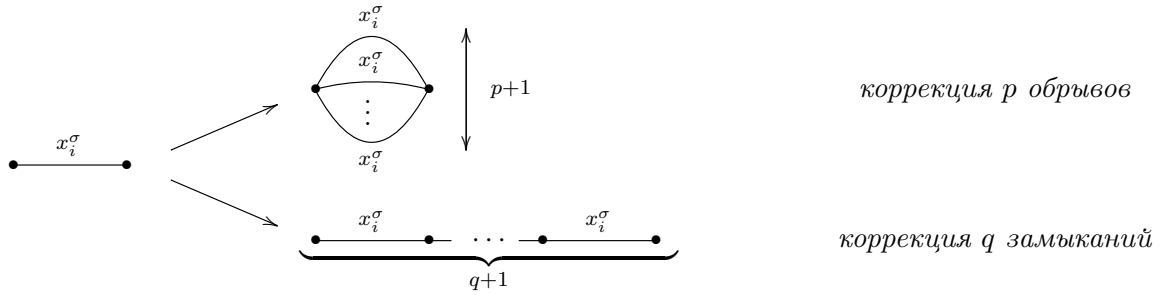



Схема $\Sigma$ называется $(p,q)$-самокорректирующейся, $p,q \geqslant 0$, если любая схема $\Sigma'$, полученная из $\Sigma$ обрывом не более $p$ контактов и замыканием не более $q$ контактов, эквивалентна $\Sigma$.

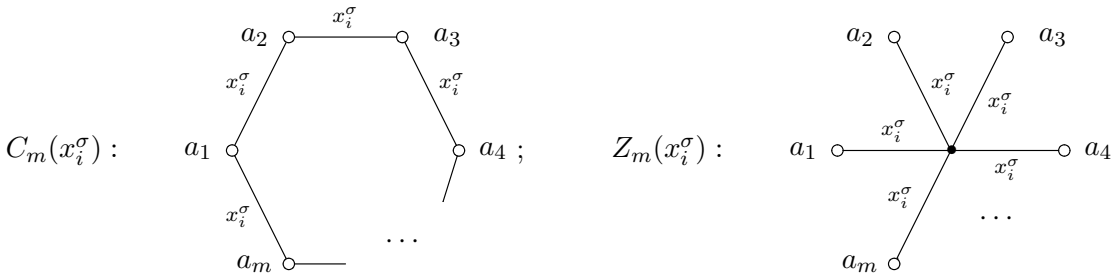
Тривиальным способом построения самокорректирующейся схемы является дублирование контактов. Для коррекции $p$ обрывов можно заменить каждый контакт на $p+1$ параллельных одинаковых ему, а для коррекции $q$ замыканий — на $q+1$ последовательных.




Кроме такого способа для решения задач пригодится метод нетривиальной коррекции одного обрыва или одного замыкания в т. н. однородных подсхемах.

Будем называть однородной любую связную КС с неразделенными полюсами, состоящую из контактов одного и того же типа. В любой такой КС, состоящей из контактов вида $x_i^\sigma$, функция проводимости между любыми двумя полюсами равна $x_i^\sigma$.

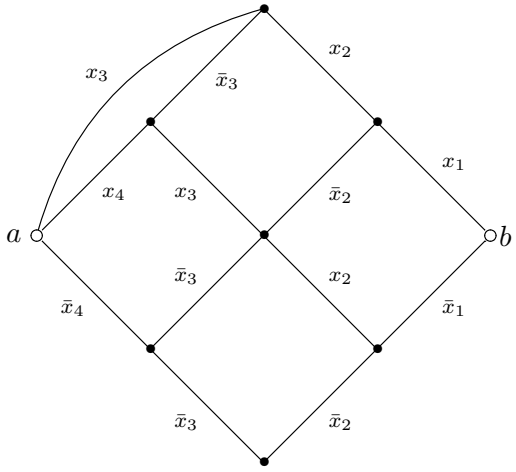
Пусть $S$ — однородная КС, состоящая из контактов $x_i^\sigma$, с полюсами $a_1, \ldots, a_m$. Тогда она эквивалентна (1,0)-самокорректирующейся схеме $C_m(x_i^\sigma)$ и (0,1)-самокорректирующейся схеме $Z_m(x_i^\sigma)$ :




При этом $L(C_m(x_i^\sigma)) = L(Z_m(x_i^\sigma)) = m$.

Представление КС $\Sigma$ в виде объединения ее однородных подсхем без общих контактов будем называть однородным разбиением КС $\Sigma$, а минимальное число подсхем в таких разбиениях будем обозначать через $\zeta(\Sigma)$. Если $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_\zeta$ — однородное разбиение КС $\Sigma$, а эквивалентная ей КС $\Sigma'$ получается из $\Sigma$ в результате замены каждой подсхемы $\Sigma_i$ на эквивалентную ей $\Sigma_i'$, то $\Sigma \sim \Sigma'$. Если при этом все замены производились на схемы вида $C_m$, то $\Sigma'$ корректирует 1 обрыв, если же на $Z_m$, то одно замыкание. Заметим, что при этом $L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) + \zeta$.

**Задача 1.** Построить по КС $\Sigma$ :

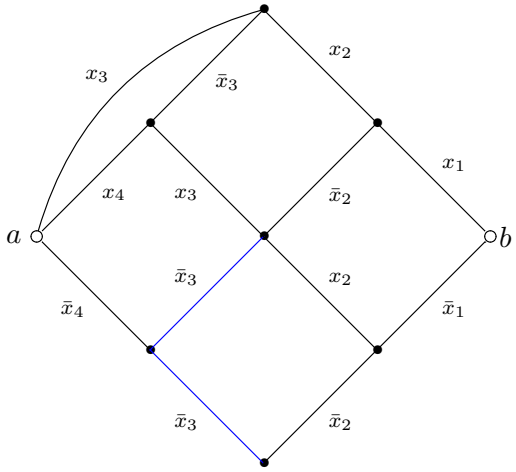



эквивалентную ей КС, корректирующую

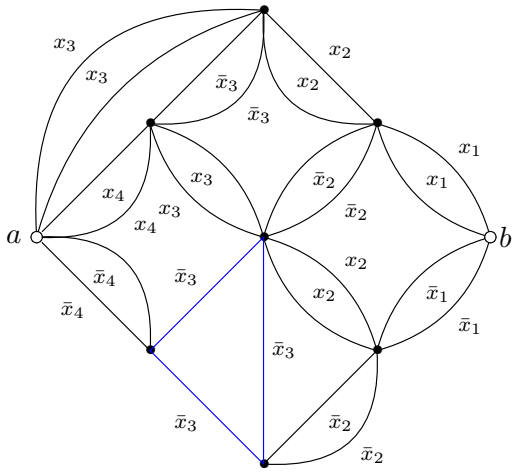
1) один обрыв,
2) одно замыкание

и имеющую сложность не более 25.

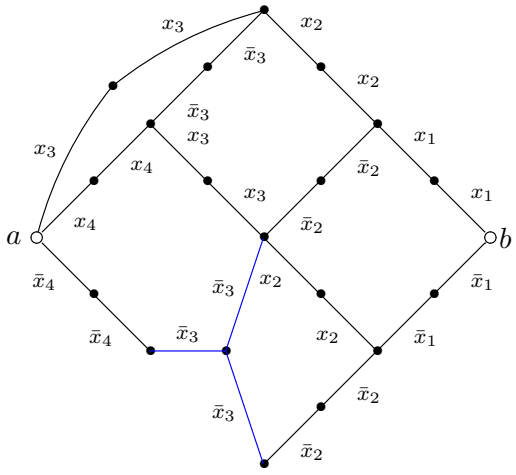
**Решение.** $L(\Sigma) = 13$, поэтому если воспользоваться методом дублирования каждого контакта, то полученная схема будет иметь сложность 26, что не удовлетворяет условию задачи. Заметим, что в схеме $\Sigma$ можно найти одну однородную подсхему $\Sigma'$ из более одного контакта:



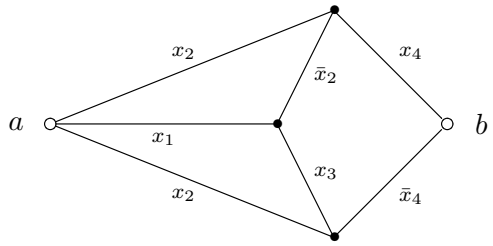

Для случая коррекции одного обрыва все остальные контакты продублируем параллельно, а подсхему $\Sigma'$ заменим на цикл $C_3(x_3)$ :




В полученной схеме 25 контактов и она $(1, 0)$-самокорректирующаяся. Для случая коррекции одного замыкания все остальные контакты продублируем последовательно, а подсхему $\Sigma'$ заменим на схему $Z_3(x_3)$ :

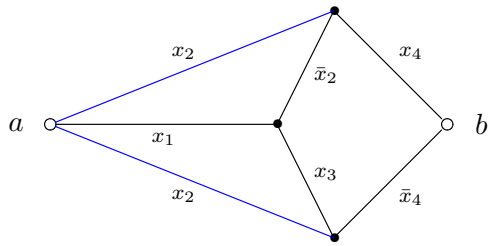


**Задача 2.** Построить по КС $\Sigma$ :

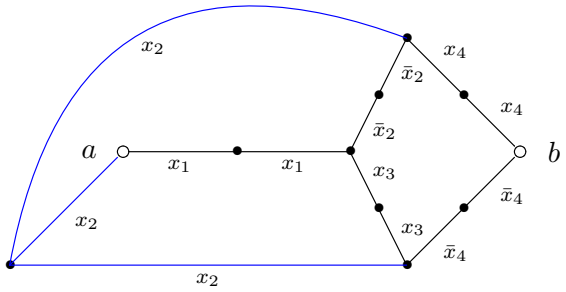



эквивалентную ей КС, корректирующую 1 замыкание, и имеющую сложность не более 13.

**Решение.** В схеме $\Sigma$ можно найти одну однородную подсхему $\Sigma'$ из более одного контакта:

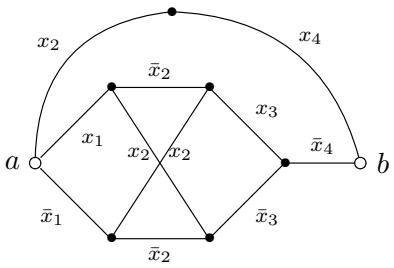



Для случая коррекции одного замыкания все остальные контакты продублируем последовательно, а подсхему $\Sigma'$ заменим на звезду $Z_3(x_2)$ :



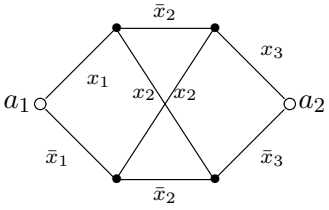

В полученной схеме 13 контактов и она $(0,1)$-самокорректирующаяся.

**Задача 3.** Построить по КС $\Sigma$ :

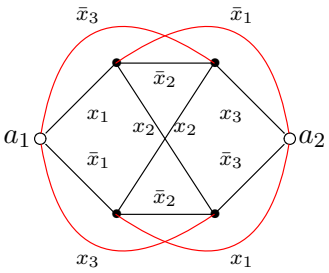



эквивалентную ей КС, корректирующую 1 обрыв, и имеющую сложность не более 18.

**Решение.** Рассмотрим следующую подсхему в $\Sigma$ :

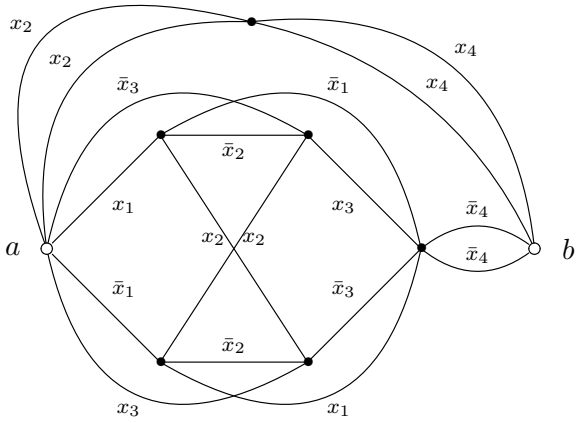



Это схема Кардо и она реализует линейную функцию $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$. Эквивалентную ей схему, корректирующую 1 обрыв, можно построить добавлением всего 4 контактов, не влияющих на её проводимость:




Нетрудно убедиться, что такая схема корректирует 1 обрыв.

Для коррекции 1 обрыва в исходной схеме $\Sigma$ заменим подсхему Кардо на построенную выше схему с добавлением четырех контактов, а остальные три контакта продублируем:




Полученная (1,0)-самокорректирующаяся схема имеет сложность 18.